Ueber sphärische Kurven.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

einer

Hohen Philosophischen Fakultät

der

Vereinigten Friedrichsuniversität Halle-Wittenberg.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Vorgelegt von

Johannes Rühlemann

aus Eisleben.

Halle
1919.
Druck von E. Schneider, Eisleben.

Referent: Geh. Regierungsrat Prof. Dr. Gutzmer.
Tag der mündlichen Prüfung: 28. April 1917.

Meinen lieben Eltern!

Inhalt.

Seite

Einleitung 1

I. Abschnitt: **Die Kurve und ihr Hauptdreikant** 4

§ 1. Der Krümmungsradius 4

§ 2. Das Tangentenbild 7

§ 3. Das Hauptnormalenbild 11

§ 4. Das Binormalenbild 13

§ 5. Die Kurven, in denen die Haupt- und Binormalen die Kugel durchstoßen 16

II. Abschnitt: **Die Krümmungsmittelpunktskurve und ihre Inverse.**

§ 1. Die Krümmungsmittelpunktskurve 20

§ 2. Die Hüllkurve der Tangentialebenen an die Kugel längs der Ausgangskurve 27

§ 3. Die Filarevolventen der Kurve (H) 34

§ 4. Beziehungen zwischen der Krümmungsmittelpunktskurve und der Hüllkurve der Tangentialebenen an die Kugel längs der Ausgangskurve 36

§ 5. Die Krümmungsmittelpunktskurve des Tangenten- und Binormalenbildes 37

§ 6. Die Hüllkurve der Tangentialebenen an die Kugel längs des Tangenten- und Binormalenbildes 41

III. Abschnitt: **Die sphärischen Evoluten und Evolventen.**

§ 1. Der sphärische Krümmungsradius 45

§ 2. Die sphärische Evolute 46

§ 3. Die zweite sphärische Evolute 48

§ 4. Die höheren sphärischen Evoluten 53

§ 5. Die sphärische Evolvente 55

§ 6. Die sphärische Evolvente des Tangentenbildes 62

§ 7. Die höheren sphärischen Evolventen 64

§ 8. Die sphärische Evolutoide 65

§ 9. Die sphärische Loxodrome 69

IV. Abschnitt: **Besondere sphärische Kurven** 82

§ 1. Die sphärische Kurve konstanter Torsion 82

§ 2. Die sphärische Kurve mit konstantem Produkt der beiden Krümmungen 93

§ 3. Die sphärische Kurve $r\varrho^n =$ konst. 102

Einleitung.

Die Geometrie auf der Kugel ist allgemein bekannt. Insonderheit sind die sphärischen Kegelschnitte eingehend untersucht und auch nach synthetischen Methoden behandelt worden. Besonders verdienen die Untersuchungen von Chasles[1]) und Steiner[1]) hervorgehoben zu werden. Ebenfalls ausführlich sind die Arbeiten von Möbius[1]) und Gudermann[1]), die beide sphärische Koordinaten einführten. Über die weitere Literatur vergleiche man Heger: Analytische Geometrie auf der Kugel. Ferner sind eine ganze Reihe besonderer sphärischer Kurven bekannt, die man bei Teixeira[2]) zusammengestellt findet. Die Geometrie im Infinitesimalen auf der Kugel ist identisch mit der Geometrie in der elliptischen Ebene.

Trotz allem scheint bisher eine systematisch vollständige Theorie der sphärischen Kurven zu fehlen, die einerseits den Zusammenhängen nachgeht, die sie mit den Fragestellungen der ebenen Geometrie verknüpfen und andererseits verbinden mit den Gebilden, wie sie aus der sphärischen Abbildung hervorgehen. Dies soll in der vorliegenden Abhandlung versucht werden.

Im I. Abschnitt habe ich Tangentenbild, Hauptnormalenbild und Binormalenbild in die wohl einfachste analytische Form gebracht und einen recht innigen Zusammenhang mit der rektifizierenden Gratlinie hervorgehoben. Der II. Abschnitt zeigt, daß die Krümmungsmittelpunktskurve als geodätischer Kreis und die Hüllkurve der Tangentialebenen an die Kugel längs der Ausgangskurve als geodätische Linie auf dem Polarkegel liegen und durch Inversion ineinander überführbar sind. Im III. Abschnitt sind einige Probleme der Ebene auf die Kugel übertragen, insonderheit der Beweis erbracht worden, daß der Réaumursche Satz, wie er in der Ebene be-

[1]) Heger: Analytische Geometrie auf der Kugel S. VI.

[2]) F. Gomes Teixeira: Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches. (Coimbra 1909.)

steht, auch unmittelbar für die Kugel Geltung besitzt. Im IV. Abschnitt soll die Fruchtbarkeit der früheren Untersuchungen dargetan werden. Es wird eine eingehende Darstellung der sphärischen Kurve konstanter Torsion und der sphärischen Kurve mit konstantem Produkt der beiden Krümmungen gegeben.

Die Grundlage zu allem ist die Theorie der sphärischen Abbildung, deren wesentlichste Eigenschaften durch die Frenetschen Formeln ihren analytischen Ausdruck finden. Aus ihr leitet sich die Theorie der sphärischen Evoluten und Evolventen her, die auf ganz ähnliche, räumliche Zusammenhänge führt, wie sie in der entsprechenden Theorie der Ebene bestehen.

Wir beschränken uns grundsätzlich auf das reelle Gebiet; daher werden die Minimalgeraden der Kugel nicht in Betracht gezogen.

Durchweg ist die Festsetzung getroffen worden, daß die Kurven auf der Einheitskugel liegen, deren Mittelpunkt der Koordinatenursprung sein soll. Da die Ausdrücke für die Koordinaten und auch für die Richtungskosinus der Tangenten, Haupt- und Binormalen ausnahmslos ähnlich gebaut sind, soll stets nur die erste der entsprechenden Beziehungen abgeleitet werden, während sich daraus die beiden anderen durch zyklische Vertauschung ergeben.

Auf das verschiedene Verhalten der sphärischen Kurven positiver und negativer Torsion ist ausdrücklich geachtet worden.

Was die benutzten Bezeichnungen anbelangt, so sind die von Scheffers in seinem Lehrbuch: „Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie“ verwendeten gebraucht worden; nur die Ausdrücke für Krümmung und Torsion werden miteinander vertauscht.

Es bezeichnen also

α, β, γ Richtungskosinus der Tangente
l, m, n „ „ Hauptnormale
λ, μ, ν „ „ Binormale
$\varrho = \frac{ds}{d\tau}$ Krümmungsradius
$r = \frac{ds}{d\sigma}$ Torsionsradius
$\mathfrak{r} = \frac{ds}{dk}$ Radius der ganzen Krümmung

H = Winkel der rektifizierenden Gratlinie mit der Tangente
K = Kugelmittelpunkt
C = Krümmungsmittelpunkt
C′ = Sphärischer Krümmungsmittelpunkt
ϱ' = Sphärischer Krümmungsradius.

Es sei mir an dieser Stelle gestattet, Herrn Prof. Dr. Salkowski in Hannover und meinem hochverehrten Lehrer Herrn Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Gutzmer meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen für die Anregung zu der vorliegenden Arbeit. Nicht zuletzt bin ich meinem hochverehrten Lehrer auch zu großem Dank verpflichtet für die Förderung meines mathematischen Studiums überhaupt. Herr Prof. Dr. Salkowski hat durch seinen mir wiederholt geschenkten, sachkundigen Rat zum Ausbau der vorliegenden Arbeit wesentlich beigetragen.

I. Abschnitt.

Die Kurve und ihr Hauptdreikant.

§ 1.

Der Krümmungsradius.

Die Tangenten einer sphärischen Kurve (M) sind gleichzeitig Tangenten an die Kugel, auf der jene liegt. Infolgedessen gehen die Normalebenen und mit ihnen die Krümmungsachsen durch den Kugelmittelpunkt. Hieraus folgt zunächst der Satz:

Die Polarfläche einer sphärischen Kurve ist ein Kegel, dessen Spitze in den Mittelpunkt der Kugel fällt.

In der Normalebene des Punktes M bilden der Krümmungsradius $MC = \varrho$, der Kugelradius $MK = 1$ und die Krümmungsachse ein bei C rechtwinkliges Dreieck MCK. Man erhält also den Krümmungsmittelpunkt in einem beliebigen Punkt einer sphärischen Kurve, indem man den Kugelmittelpunkt auf die Schmiegungsebene projiziert.

Bezeichnen wir den Winkel CKM mit φ, so erhalten wir

$$\varrho = \sin\varphi. \tag{1}$$

In der Normalebene des benachbarten Punktes M_1 ist

$$\sphericalangle C_1KM_1 = \varphi + d\varphi.$$

Da das Bogenelement MM_1 auf der Normalebene des Punktes M_1 senkrecht steht, läßt sich die Ebene C_1KM_1 nach C_1KM umlegen, und es ist folglich auch

$$\sphericalangle C_1KM = \varphi + d\varphi.$$

Hiermit ergibt sich

$$\sphericalangle CKC_1 = \varphi - (\varphi + d\varphi) = - d\varphi.$$

Andererseits ist dieser Winkel als Winkel benachbarter Krümmungsachsen gleich dem Schmiegungswinkel $d\sigma$, sodaß wir die Beziehung haben

$$(2) \qquad d\varphi = \varepsilon d\sigma; \quad \varepsilon = \pm 1$$

und mit ihr aus (1) für den Krümmungsradius den Ausdruck erhalten

$$(3) \qquad \varrho = \varepsilon \sin \sigma.$$

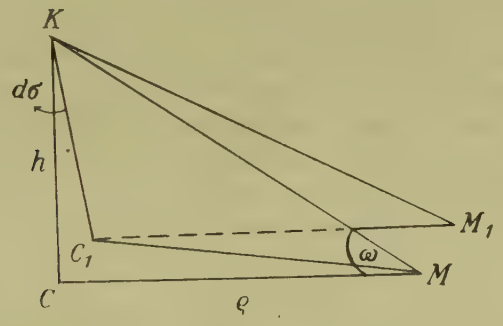

Fig. 1.

Die Bestimmung des Vorzeichens ist eindeutig, wenn wir uns auf ein Kurvenstück beschränken, für das $0 < \sigma < \frac{\pi}{2}$ ist. Diese Festsetzung ist gänzlich unbedenklich, solange nicht der ganze Verlauf der Kurve, sondern nur die Umgebung eines Punktes betrachtet wird.

Unter dieser Voraussetzung erhalten wir für den Krümmungsradius:

$$(4) \qquad \varrho = \sin \sigma.$$

Die Integration der natürlichen Gleichung der sphärischen Kurven

$$(5) \qquad \frac{d^2\varrho}{d\sigma^2} + \varrho = 0.^{1})$$

ergibt dasselbe Ergebnis.

Die natürliche Gleichung der sphärischen Kurven nach Serret

$$\varrho^2 + r^2 \frac{d\varrho}{ds} = \text{konst.}^{2})$$

ist das erste Integral der Beziehung (5).

---

[1]) Schell-Salkowski: Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung S. 186.

[2]) Serret: Sur quelques formules relatives à la théorie des courbes à double courbure. Journal de Mathém. T. XVI. (1851.)

Den zweckmäßig orientierten Abstand h des Kugelmittelpunkts vom Krümmungsmittelpunkt ermitteln wir zu

$$h = \cos\sigma \quad (6)$$

[1])

und für den Neigungswinkel ω des Kugelradius gegen die Hauptnormale finden wir

$$\operatorname{tg}\omega = \cot\sigma \quad (7)$$

[2])

$$d\omega = -d\sigma. \quad (8)$$

Die Änderung des Winkels, den der Kugelradius mit der Hauptnormale einschließt, ist abgesehen vom Vorzeichen gleich dem Schmiegungswinkel.

Der Ausdruck, durch welchen der Krümmungsradius dargestellt wurde, führt zu weiteren Ergebnissen. Die Differentiation der Bedingungsgleichung der sphärischen Kurve

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

führt auf

$$\Sigma x\alpha = 0,$$

wenn wir die Bogenlänge als Parameter benutzen.

Hieraus folgt:

$$\Sigma\alpha^2 + \frac{1}{\varrho}\Sigma x\mathfrak{l} = 0$$

oder

$$\Sigma x\mathfrak{l} = -\sin\sigma.$$

Die Differentiation dieser Beziehung liefert

$$\Sigma\alpha\mathfrak{l} - \frac{1}{\varrho}\Sigma x\alpha - \frac{1}{r}\Sigma x\lambda = -\cos\sigma\frac{d\sigma}{ds},$$

sodaß wir bekommen

$$\Sigma x\lambda = \cos\sigma.$$

Mithin haben wir bei sphärischen Kurven die Beziehungen.

$$\Sigma x\alpha = 0,$$

$$\Sigma x\mathfrak{l} = -\sin\sigma, \quad (9)$$

$$\Sigma x\lambda = \cos\sigma,$$

und diese lassen erkennen, daß sich die Gleichungen der sphärischen Kurve darstellen lassen durch:

$$\begin{aligned} x &= \lambda\cos\sigma - \mathfrak{l}\sin\sigma, \\ y &= \mu\cos\sigma - \mathfrak{m}\sin\sigma, \\ z &= \nu\cos\sigma - \mathfrak{n}\sin\sigma. \end{aligned} \quad (10)$$

[3])

---

[1]) Schell-Salkowski S. 53.

[2]) Schell-Salkowski S. 54.

[3]) Serret a. a. O.

§ 2.

Das Tangentenbild.

Die Tangente im Punkte M der Kurve (M) sei MT. Wir erhalten das Tangentenbild t, indem wir den Radius Kt ∥ MT konstruieren. Es liegt auf dem größten Kreise, der durch MT bestimmt ist und zwar ist der Bogen $Mt = \sphericalangle MKt = \frac{1}{2}\pi$. Das Tangentenbild einer sphärischen Kurve steht also zu ihr in derselben Beziehung, wie das Hauptnormalenbild einer gewöhnlichen Raumkurve zu ihrem Tangentenbild.[1])

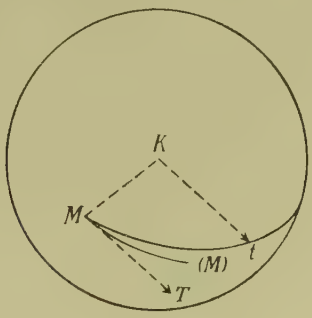

Fig. 2.

Die Koordinaten des Tangentenbildes sind gleich den Richtungskosinus der Tangenten der Ausgangskurve. Bezeichnen wir die Koordinaten mit x_1, y_1, z_1, so erhalten wir:

$$(1) \qquad x_1 = \alpha, \quad y_1 = \beta, \quad z_1 = \gamma.$$

Ferner ist das Bogenelement des Tangentenbildes

$$(2) \qquad ds_1 = d\tau$$

gleich dem Kontingenzwinkel der Ausgangskurve.

Die Richtungskosinus der Tangenten ergeben sich aus

$$\alpha_1 = \frac{dx_1}{ds_1} = \frac{d\alpha}{d\tau}.$$

Es ist

$$(3) \qquad \alpha_1 = l, \quad \beta_1 = m, \quad \gamma_1 = n,$$

[1]) Schell-Salkowski S. 26.

Die Tangenten des Tangentenbildes sind den Hauptnormalen von (M) parallel, mithin sind die Normalebenen des Tangentenbildes parallel den rektifizierenden Ebenen der Ausgangskurve.

Benachbarte Tangenten des Tangentenbildes schließen denselben Winkel ein wie benachbarte Hauptnormalen der Kurve (M). Folglich ist

$$d\tau_1 = dk. \tag{4}$$

Der Kontingenzwinkel des Tangentenbildes ist gleich dem Winkel der ganzen Krümmung der Ausgangskurve. Die Differentiation der Gleichungen (3) ergibt:

$$\frac{d\alpha_1}{ds_1} = \frac{dl}{d\tau} = -\left(\alpha + \frac{d\sigma}{d\tau}\lambda\right).$$

Mithin erhalten wir:

$$\frac{1}{\varrho_1^2} = 1 + \left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right)^2.$$

Wir führen nun den Winkel H ein, den die rektifizierende Gerade mit der Tangente einschließt. Man orientiert die rektifizierende Gerade so, daß der Winkel zwischen ihr und der Tangente kleiner als π ist. Nach der Festsetzung des Vorzeichens für die Torsion wird H ein spitzer oder stumpfer Winkel sein, je nachdem die Torsion negativ oder positiv ist. Es ist in jedem Fall

$$\sin H = \frac{d\tau}{dk} = \frac{r}{\varrho}, \quad \cos H = -\frac{d\sigma}{dk} = -\frac{r}{r'},$$

$$\operatorname{tg} H = -\frac{r}{\varrho} = -\frac{d\tau}{d\sigma}.$$

Da der Winkel H der Festsetzung nach kleiner als π sein soll, genügt zu seiner eindeutigen Bestimmung die letzte der Gleichungen.[1])

Mit Hilfe des Winkels H wird:

$$\frac{1}{\varrho_1^2} = 1 + \cot^2 H = \frac{1}{\sin^2 H}.$$

Da der Krümmungsradius stets positiv ist, haben wir der Quadratwurzel das positive Zeichen zu geben, sodaß wir erhalten:

$$\varrho_1 = \sin H. \tag{5}$$

---

[1]) Schell-Salkowski S. 30.

Nunmehr ergeben sich die Richtungskosinus der Hauptnormalen aus:

$$l_1 = \varrho_1 \frac{d\alpha_1}{ds_1}.$$

Es wird

$$l_1 = - \sin H \, (\alpha - \lambda \cot H)$$

und somit

$$\begin{aligned} l_1 &= \lambda \cos H - \alpha \sin H, \\ m_1 &= \mu \cos H - \beta \sin H, \\ n_1 &= \nu \cos H - \gamma \sin H. \end{aligned} \tag{6}$$

Die Differentiation bestimmt:

$$\frac{dl_1}{ds_1} = \left(\frac{d\lambda}{ds} \cos H - \frac{d\alpha}{ds} \sin H \right) ds - (\lambda \sin H + \alpha \cos H) \, dH.$$

Hieraus ergibt sich nach einigen Umformungen

$$dl_1 = - [l \, dk + (\lambda \sin H + \alpha \cos H) \, dH,$$

sodaß wir für den Winkel der ganzen Krümmung den Ausdruck erhalten:

$$dk_1 = \sqrt{dk^2 + dH^2} \tag{7}$$

und für den Radius der ganzen Krümmung:

$$r_1 = \frac{d\tau}{\sqrt{dk^2 + dH^2}}. \tag{8}$$

Die Richtungskosinus der Binormalen finden wir aus der Beziehung

$$\lambda_1 = \beta_1 n_1 - \gamma_1 m_1.$$

Sie nehmen die Form an

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha \cos H + \lambda \sin H, \\ \mu_1 &= \beta \cos H + \mu \sin H, \\ \nu_1 &= \gamma \cos H + \nu \sin H. \end{aligned} \tag{9}$$

Wir ermitteln danach:

$$d\lambda_1 = \left(\frac{d\alpha}{ds} \cos H + \frac{d\lambda}{ds} \sin H \right) ds + (\lambda \cos H - \alpha \sin H) \, dH.$$

Der erste Summand wird identisch Null, sodaß sich der Schmiegungswinkel bestimmt aus

$$d\sigma_1 = dH. \tag{10}$$

Die Koordinaten ξ_1, η_1, ζ_1, des Krümmungsmittelpunktes finden wir mit Hilfe der allgemeinen Formel

$$\xi_1 = x_1 + \varrho_1 l_1.$$

Wir bekommen:

$$\xi_1 = \alpha + \sin H\,(\lambda \cos H - \alpha \sin H)$$

und hieraus

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \cos H\,(\lambda \sin H + \alpha \cos H), \\ \eta_1 &= \cos H\,(\mu \sin H + \beta \cos H), \\ \zeta_1 &= \cos H\,(\nu \sin H + \gamma \cos H). \end{aligned} \tag{11}$$

Die Radien nach den Punkten des Tangentenbildes sind Erzeugende eines Drehkegels, der die Kugel im Krümmungskreis des Tangentenbildes schneidet.[1]) Das Bild der Kegelachse ist der sphärische Krümmungsmittelpunkt und fällt mit dem Bild der rektifizierenden Geraden zusammen.[2]) Die Achse des Kegels verbindet den Kugelmittelpunkt mit dem Mittelpunkt jenes Krümmungskreises. Der Abstand beider Punkte ist unter Anwendung der allgemeinen Formel $h = \cos\sigma$ auf das Tangentenbild bestimmt durch

$$h_1 = \cos H; \tag{12}$$

infolgedessen sind, da die Richtungskosinus $\frac{\xi_1}{h_1}$, $\frac{\eta_1}{h_1}$, $\frac{\zeta_1}{h_1}$ der Kegelachse das Tangentenbild der rektifizierenden Gratlinie darstellen, die Gleichungen dieses letzteren

$$\begin{aligned} X_1 &= \lambda \sin H + \alpha \cos H, \\ Y_1 &= \mu \sin H + \beta \cos H, \\ Z_1 &= \nu \sin H + \gamma \cos H. \end{aligned} \tag{13}$$

Vergleichen wir dieses Ergebnis mit den Gleichungen (9), so kommen wir zu dem Satze:

Das Tangentenbild der rektifizierenden Gratlinie ist das Binormalenbild des Tangentenbildes der Ausgangskurve.

Dieser Satz bestätigt das Resultat für den Schmiegungswinkel, denn nach ihm sind die Tangenten der rektifizierenden Gratlinie parallel den Binormalen des Tangentenbildes von (M), sodaß der Schmiegungswinkel des Tangentenbildes in der Tat gleich dem Kontingenzwinkel der rektifizierenden Gratlinie ist. Diese Beziehung hat die weitere zur Folge, daß die Hauptnormalen der rektifizierenden Gratlinie parallel den Hauptnormalen des Tangentenbildes sind, und das stimmt überein mit der Gleichung (7), nach

[1]) De Saint-Venant, Mémoire sur les lignes courbes non planes. Journal de l'École polytechn. 30. cah. 1845.
[2]) Schell-Salkowski S. 62.

welcher der Winkel der ganzen Krümmung des Tangentenbildes gleich dem der rektifizierenden Gratlinie ist.[1]) Es gilt also der Satz:

Das Hauptnormalenbild der rektifizierenden Gratlinie ist das Hauptnormalenbild des Tangentenbildes der Ausgangskurve.

Demnach schließen die Tangenten der rektifizierenden Gratlinie, mit denen des Tangentenbildes in entsprechenden Punkten konstante Winkel ein, und das Verhältnis von Krümmung und Torsion der einen Kurve ist eine linear gebrochene Funktion derselben Größe für die andere Kurve.[2])

Da die Schmiegungsebene der rektifizierenden Gratlinie parallel der Normalebene des Tangentenbildes ist, so ist ihre Binormale parallel der Tangente dieses Tangentenbildes und deshalb auch parallel den Hauptnormalen der Ausgangskurve; d. h.

Das Binormalenbild der rektifizierenden Gratlinie ist das Hauptnormalenbild der Ausgangskurve.

Wir erhalten für den Torsionsradius

$$(14) \qquad r_1 = \frac{d\tau}{dH}.$$

Nunmehr erhalten wir mit $\varrho_1 = \sin H$ die Beziehung

$$(15) \qquad \operatorname{tg} H_1 = -\frac{dk}{dH}.$$

Der Neigungswinkel ω_1 des Kugelradius gegen die Hauptnormale des Tangentenbildes ist bestimmt durch:

$$(16) \qquad \operatorname{tg} \omega_1 = \cot H.$$

§ 3.

Das Hauptnormalenbild.

Die Koordinaten des Hauptnormalenbildes sind gleich den Richtungskosinus der Hauptnormalen der Ausgangskurve. Die Koordinaten seien x_2, y_2, z_2, dann ist

$$(1) \qquad x_2 = l, \quad y_2 = m, \quad z_2 = n.$$

[1]) Schell-Salkowski S. 69

[2]) Schell-Salkowski S. 178.

Nun fanden wir aber, daß die Tangenten des Tangentenbildes parallel den Hauptnormalen von (M) sind. Mithin besteht der Satz:

Das Hauptnormalenbild einer sphärischen Kurve ist das zweite Tangentenbild der letzteren.

Es steht also zum Tangentenbild der Ausgangskurve in derselben Beziehung wie dieses Tangentenbild zur Ausgangskurve selbst. Demnach ergibt sich für sein Bogenelement:

$$ds_2 = dk \tag{2}$$

und für die Richtungskosinus der Tangenten finden wir

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \lambda \cos H - \alpha \sin H, \\ \beta_2 &= \mu \cos H - \beta \sin H, \\ \gamma_2 &= \nu \cos H - \gamma \sin H. \end{aligned} \tag{3}$$

Folglich sind die Tangenten des Hauptnormalenbildes parallel den Hauptnormalen der rektifizierenden Gratlinie und deshalb die rektifizierende Ebene der rektifizierenden Gratlinie parallel der Normalebene des Hauptnormalenbildes.

Wir erhalten:

$$d\alpha_2 = dl_1 = -\left[l\,dk + (\lambda \sin H + \alpha \cos H)\, dH\right]$$

und es wird:

$$d\tau_2 = \sqrt{dk^2 + dH^2}. \tag{4}$$

Ferner bekommen wir:

$$\frac{d\alpha_2}{ds_2} = -\left[l + (\lambda \sin H + \alpha \cos H) \frac{dH}{dk}\right]$$

und hieraus:

$$\left(\frac{1}{\varrho_2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dH}{dk}\right)^2,$$

sodaß der Krümmungsradius des Hauptnormalenbildes die Form annimmt:

$$\varrho_2 = \frac{dk}{\sqrt{dk^2 + dH^2}}. \tag{5}$$

Infolgedessen nehmen die Richtungskosinus der Hauptnormalen die Gestalt an:

$$l_2 = \left\{ l \frac{dk}{\sqrt{dk^2 + dH^2}} + (\lambda \sin H + \alpha \cos H) \frac{dH}{\sqrt{dk^2 + dH^2}} \right\}.$$

Es gelten aber wegen $\varrho_2 = \sin \sigma_2$ die folgenden Beziehungen:

$$\sin \sigma_2 = \frac{dk}{\sqrt{dk^2 + dH^2}}. \tag{6}$$

$$\cos\sigma_2 = \frac{dH}{\sqrt{dk^2 + dH^2}}. \tag{7}$$

Dies ist der Abstand des Kugelmittelpunkts vom Krümmungsmittelpunkt des Hauptnormalenbildes.

Aus den Gleichungen (6) und (7) folgt noch:

$$\operatorname{tg}\sigma_2 = \frac{dk}{dH}. \tag{8}$$

Folglich wird der Neigungswinkel des Kugelradius gegen die Hauptnormalen des Hauptnormalenbildes dargestellt durch:

$$\operatorname{tg}\omega_2 = \frac{dH}{dk}. \tag{9}$$

Wir können nun für die Richtungskosinus der Hauptnormalen schreiben:

$$\begin{aligned} l_2 &= -[l\sin\sigma_2 + (\lambda\sin H + \alpha\cos H)\cos\sigma_2], \\ m_2 &= -[m\sin\sigma_2 + (\mu\sin H + \beta\cos H)\cos\sigma_2], \\ n_2 &= -[n\sin\sigma_2 + (\nu\sin H + \gamma\cos H)\cos\sigma_2]. \end{aligned} \tag{10}$$

Die Richtungskosinus der Binormalen werden dann:

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= [(\lambda\sin H + \alpha\cos H)\sin\sigma_2 - l\cos\sigma_2], \\ \mu_2 &= [(\mu\sin H + \beta\cos H)\sin\sigma_2 - m\cos\sigma_2], \\ \nu_2 &= [(\nu\sin H + \gamma\cos H)\sin\sigma_2 - n\cos\sigma_2]. \end{aligned} \tag{11}$$

§ 4.
Das Binormalenbild.

Die Koordinaten des Binormalenbildes sind gleich den Richtungskosinus der Binormalen der Ausgangskurve. Bezeichnen wir also jene Koordinaten mit x_3, y_3, z_3, so haben wir:

$$x_3 = \lambda, \quad y_3 = \mu, \quad z_3 = \nu. \tag{1}$$

Das Bogenelement ist:

$$ds_3 = \varepsilon\, d\sigma \tag{2}$$

und dabei ist $\varepsilon = \pm 1$, je nachdem die Ausgangskurve positive oder negative Torsion besitzt.

Die Richtungskosinus der Tangenten finden wir aus

$$\alpha_3 = \frac{dx_3}{ds_3} = \frac{d\lambda}{ds_3},$$

sodaß wir erhalten:

$$\alpha_3 = \varepsilon l, \quad \beta_3 = \varepsilon m, \quad \gamma_3 = \varepsilon n. \tag{3}$$

Hieraus ergibt sich:

$$\frac{d\alpha_3}{ds_3} = \frac{dl}{d\sigma} = -\left(\alpha\frac{r}{\varrho} + \lambda\right).$$

Folglich bekommen wir für den Krümmungsradius:

$$\varrho_3 = \frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + r^2}}. \tag{4}$$

Hierbei ist wiederum der Quadratwurzel das positive Zeichen zu geben. Nun ist jedoch der Radius der ganzen Krümmung ausgedrückt durch:

$$\mathfrak{r} = \frac{|\varrho r|}{\sqrt{\varrho^2 + r^2}}$$ [1])

und hiermit erhalten wir:

$$\varrho_3 = \frac{\mathfrak{r}}{r} \tag{5}$$

oder auch

$$\varrho_3 = -\varepsilon\cos H. \tag{6}$$

Mithin besteht zwischen den Krümmungsradien des Tangenten- und Binormalenbildes die Beziehung

$$\varrho_1^2 + \varrho_3^2 = 1. \tag{7}$$

Der Abstand des Kugelmittelpunktes vom Krümmungsmittelpunkt des Binormalenbildes ist

$$h_3 = \sin H. \tag{8}$$

Infolgedessen ist auch:

$$h_1^2 + h_3^2 = 1. \tag{9}$$

Die Gleichungen (3) ergeben den Satz:

Das Tangentenbild des Binormalenbildes ist identisch mit dem Hauptnormalenbild der Ausgangskurve oder liegt zu ihm symmetrisch, je nachdem die Ausgangskurve positive oder negative Torsion besitzt.

Ferner sind damit die Tangenten des Tangentenbildes parallel denjenigen des Binormalenbildes. Besitzt die Ausgangskurve positive Torsion, so sind die Tangenten beider Kurven auch gleich gerichtet, während sie bei negativer Torsion entgegengesetzt gerichtet

[1]) Sehell-Salkowski S. 28.

sind. Das Tangenten- und Binormalenbild sind danach parallele Raumkurven und besitzen deshalb in entsprechenden Punkten auch parallele Haupt- und Binormalen und somit gleichen Kontingenzwinkel, Schmiegungswinkel[1]) und Winkel der ganzen Krümmung. Die Quotienten je zweier dieser Größen sind ebenfalls einander gleich. Diese Sätze gelten ganz allgemein für jede Raumkurve. Es ist

$$\text{(10)} \qquad \operatorname{tg} H_1 = \operatorname{tg} H_3.$$

Wir können deshalb auch zwei Sätze, die wir bei Betrachtung des Tangentenbildes fanden, jetzt dahin aussprechen:

Das Tangentenbild der rektifizierenden Gratlinie ist das gemeinsame Binormalenbild des Tangenten- und Binormalenbildes der Ausgangskurve;

und ferner:

Das Hauptnormalenbild der rektifizierenden Gratlinie ist das gemeinsame Hauptnormalenbild des Tangenten- und Binormalenbildes der Ausgangskurve.

Der Torsionsradius wird

$$\text{(11)} \qquad r_3 = \varepsilon \frac{d\sigma}{dH};$$

sodaß wir die Beziehung haben

$$\text{(12)} \qquad \frac{r_1}{r_3} = - \operatorname{tg} H;$$

und infolgedessen auch:

$$\text{(13)} \qquad \frac{\varrho_1}{\varrho_3} = \frac{r_1}{r_3}.$$

Der Radius der ganzen Krümmung ist bestimmt durch:

$$\text{(14)} \qquad r_1 = \frac{|\, d\sigma \,|}{\sqrt{dk^2 + dH^2}}.$$

Mithin erhalten wir:

$$\text{(15)} \qquad r_1^2 + r_3^2 = \varrho_2^2$$

und ferner:

$$\text{(16)} \qquad \frac{\varrho_1}{\varrho_3} = \frac{r_1}{r_3} = \frac{r_1}{r_3}.$$

---

[1]) Besitzt die Ausgangskurve negative Torsion, so unterscheiden sich der Schmiegungswinkel des Tangentenbildes und des Binormalenbildes durch das Vorzeichen.

§ 5.

Die Kurven, in denen die Haupt- und Binormalen die Kugel durchstossen.

Die Hauptnormale des Punktes M schneide die Kugel im Punkte L mit den Koordinaten x', y', z', und die Binormale im Punkte N mit den Koordinaten x'', y'', z''.

Die Dreiecke LKM und NKM sind gleichschenklig. Mithin ist, da die Krümmungsachse auf der Hauptnormalen senkrecht steht,

(1) $$LM = 2\sin\sigma.$$

Der Krümmungsmittelpunkt halbiert also die Entfernung entsprechender Punkte M und L.

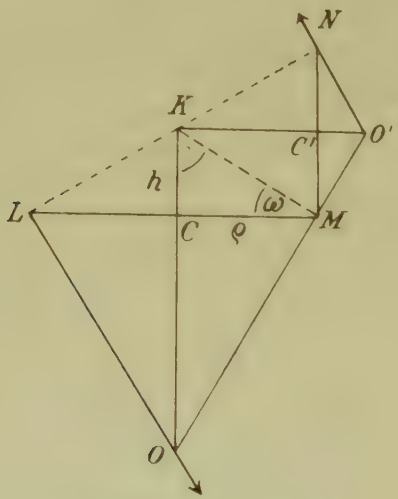

Fig. 3.

Desgleichen finden wir:

(2) $$NM = 2\cos\sigma,$$

sodaß der Fußpunkt des Lotes vom Kugelmittelpunkt auf die Binormale die Entfernung entsprechender Punkte M und N halbiert.

Es ist $\sphericalangle KMC = \sphericalangle COM = \omega$; der Winkel entsprechender Tangenten der Kurven (M) und (L) ist $LOM = 2\omega$. Nun ist aber $\cos\omega = \sin\sigma$, sodaß wir erhalten:

(3) $$\Sigma\alpha\alpha' = \sin 2\sigma,$$

wenn wir mit α', β' und γ' die Richtungskosinus der Tangenten der Kurve (L) bezeichnen.

Durch dieselbe Überlegung ergibt sich

$$\Sigma\alpha\alpha'' = \cos 2\sigma, \tag{4}$$

α'', β'' und γ'' sind die Richtungskosinus der Tangenten der Kurve (N). Es besteht die Beziehung:

$$\Sigma(\alpha\alpha')^2 + \Sigma(\alpha\alpha'')^2 = 1. \tag{5}$$

Die Gleichung der Hauptnormale lautet:

$$x' = x + tl.$$

Der Parameter t bedeutet die Entfernung des Punktes L von M. Demnach lauten die Gleichungen der Kurve, in der die Hauptnormalen die Kugel durchstoßen:

$$\begin{aligned} x' &= x + 2l\sin\sigma, \\ y' &= y + 2m\sin\sigma, \\ z' &= z + 2n\sin\sigma. \end{aligned} \tag{6}$$

Man kann diese auch in der Form schreiben:

$$\begin{aligned} x' &= \lambda\cos\sigma + l\sin\sigma, \\ y' &= \mu\cos\sigma + m\sin\sigma, \\ z' &= \nu\cos\sigma + n\sin\sigma, \end{aligned} \tag{7}$$

indem man in die Gleichungen (6) die Ausdrücke für die Koordinaten einer sphärischen Kurve einsetzt.[1])

Die Gleichungen der Kurve, in denen die Binormalen die Kugel durchstoßen, bekommen wir auf dieselbe Art. Sie lauten:

$$\begin{aligned} x'' &= x - 2\lambda\cos\sigma, \\ y'' &= y - 2\mu\cos\sigma, \\ z'' &= z - 2\nu\cos\sigma, \end{aligned} \tag{8}$$

oder auch

$$\begin{aligned} x'' &= -(\lambda\cos\sigma + l\sin\sigma), \\ y'' &= -(\mu\cos\sigma + m\sin\sigma), \\ z'' &= -(\nu\cos\sigma + n\sin\sigma). \end{aligned} \tag{9}$$

Die Gleichungen (7) und (9) ergeben die Beziehung:

$$x'' = -x',\ y'' = -y',\ z'' = -z'. \tag{10}$$

Die Kurven, in denen die Haupt- und Binormalen die Kugel durchstoßen, sind also in Bezug auf den Kugelmittelpunkt symmetrisch gelegen, was geometrisch auch ohne weiteres einleuchtet.

Die Differentiation der Gleichungen (6) ergibt:

$$dx' = -\alpha\,ds + 2\,d\sigma\,(l\cos\sigma - \lambda\sin\sigma),$$

sodaß wir für das Bogenelement erhalten:

$$ds' = \sqrt{ds^2 + 4\,d\sigma^2}. \tag{11}$$

[1]) Vergl. S. 6.

Dasselbe Ergebnis finden wir aus den Gleichungen (8), denn es ist

$$ds'' = ds'. \tag{12}$$

Die Richtungskosinus α', β', γ' der Tangenten sind bestimmt durch:

$$\alpha' = \frac{-\alpha\, ds + 2\, d\sigma (l\cos\sigma - \lambda \sin\sigma)}{\sqrt{ds^2 + 4\, d\sigma^2}},$$

dagegen ist

$$\alpha'' = -\alpha'. \tag{13}$$

Wir können nunmehr den Winkel zwischen der Normalebene der Ausgangskurve und der Normalebene der Kurve, in der ihre Hauptnormalen die Kugel durchstoßen, bestimmen. Es ist derselbe Winkel, den die Tangenten beider Kurven miteinander einschließen. Bezeichnen wir ihn mit χ, so ergibt sich:

$$\cos\chi = \Sigma \frac{[-\alpha\, ds + 2\, d\sigma (l\cos\sigma - \lambda\sin\sigma)]\,\alpha}{\sqrt{ds^2 + 4\, d\sigma^2}}.$$

Infolgedessen wird:

$$\cos\chi = \frac{-\,ds}{\sqrt{ds^2 + 4\, d\sigma^2}},$$

$$\sin\chi = \frac{2\, d\sigma}{\sqrt{ds^2 + 4\, d\sigma^2}}.$$

Unter Benutzung dieses Hilfswinkels nehmen die Richtungskosinus der Tangenten die Form an

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha\cos\chi + (l\cos\sigma - \lambda\sin\sigma)\sin\chi, \\ \beta' &= \beta\cos\chi + (m\cos\sigma - \mu\sin\sigma)\sin\chi, \\ \gamma' &= \gamma\cos\chi + (n\cos\sigma - \nu\sin\sigma)\sin\chi. \end{aligned} \tag{14}$$

Nunmehr hängen die weiteren Bestimmungsgrößen von dem eingeführten Hilfswinkel ab.

Im Anschluß an diese Ergebnisse ermitteln wir leicht die Gleichungen derjenigen Kurven, in denen die Haupt- und Binormalen des Tangentenbildes die Kugel durchsetzen. Sie lauten:

$$\begin{aligned} \xi_1' &= \pm[\alpha\cos(2H) + \lambda\sin(2H)], \\ \eta_1' &= \pm[\beta\cos(2H) + \mu\sin(2H)], \\ \zeta_1' &= \pm[\gamma\cos(2H) + \nu\sin(2H)]. \end{aligned} \tag{15}$$

Das positive Zeichen gilt stets für die Kurve, in der die Hauptnormalen, und das negative für die, in der die Binormalen die Kugel schneiden.

Die Kurven, in denen die Haupt- und Binormalen des Hauptnormalenbildes die Kugel durchstoßen, haben die Gleichungen:

$$\xi'_1 = \pm \{l\cos(2\sigma_2) - [\lambda\sin H + \alpha\cos H]\sin(2\sigma_2)\},$$
$$\eta'_2 = \pm \{m\cos(2\sigma_2) - [\mu\sin H + \beta\cos H]\sin(2\sigma_2)\},$$
$$\zeta'_2 = \pm \{n\cos(2\sigma_2) - [\nu\sin H + \gamma\cos H]\sin(2\sigma_2)\}.$$

Endlich werden die Gleichungen derjenigen Kurven, in denen die Haupt- und Binormalen des Binormalenbildes die Kugel durchsetzen, gefunden in der Form:

$$\xi'_3 = \pm[\alpha\sin(2H) - \lambda\cos(2H)],$$
$$\gamma'_3 = \pm[\beta\sin(2H) - \mu\cos(2H)],$$
$$\zeta'_3 = \pm[\gamma\sin(2H) - \nu\cos(2H)].$$

Die Hauptnormalen der Kurven (L) und (N) sind übrigens ebenfalls entgegengesetzt, während die Binormalen gleichgerichtet sind.

II. Abschnitt.

Die Krümmungsmittelpunktskurve und ihre Inverse.

§ 1.

Die Krümmungsmittelpunktskurve.

Wir bezeichnen die Koordinaten des zum Punkte M gehörigen Krümmungsmittelpunktes C mit x_1, y_1 und z_1. Da der Abstand h des Kugelmittelpunktes vom Krümmungsmittelpunkt bekannt und die Krümmungsachse parallel der Binormale ist, können wir die Gleichungen der Krümmungsmittelpunktskurve ansetzen in der Form:

$$(1) \qquad \begin{aligned} x_1 &= \lambda \cos\sigma, \\ y_1 &= \mu \cos\sigma, \\ z_1 &= \nu \cos\sigma. \end{aligned}$$

Man erhält dieses Resultat auch, wenn man in den bekannten Ausdruck für den Krümmungsmittelpunkt

$$x_1 = x + \varrho l$$

die Werte

$$\begin{aligned} x &= \lambda \cos\sigma - l \sin\sigma, \\ \varrho &= \sin\sigma \end{aligned}$$

einsetzt.

Das Bogenelement der Krümmungsmittelpunktskurve (C) liegt in der Normalebene der Kurve (M). Wir finden es durch folgende

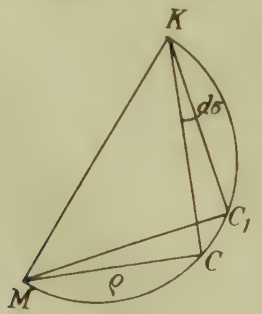

Fig. 4.

geometrische Überlegung. Durch die benachbarten Krümmungsmittelpunkte C und C_1 sowie den Kugelmittelpunkt K gehen die benachbarten Krümmungsachsen und stehen in C bez. C_1 auf den entsprechenden Hauptnormalen senkrecht. Folglich ist $MK = 1$ der Durchmesser eines Kreises, der durch die Punkte C und C_1 sowie durch M und K geht. Das Bogenelement CC_1 stimmt also mit dem dieses Kreises überein. Da der entsprechende Peripheriewinkel gleich dem Schmiegungswinkel ist, erhalten wir:

$$ds_1 = \varepsilon\, d\sigma. \quad (2)$$ [1])

Das Bogenelement ist in allen Fällen positiv. Wir haben deshalb $\varepsilon = \pm 1$ zu setzen, je nachdem die Torsion der Kurve (M) positiv oder negativ ist.

Vergleichen wir das Resultat mit dem für das Bogenelement des Binormalenbildes, so finden wir, daß die Bogenelemente beider Kurven einander gleich sind.

Die Differentiation der Gleichungen (1) liefert:

$$dx_1 = \left(\frac{d\lambda}{d\sigma}\cos\sigma - \lambda\sin\sigma\right)d\sigma.$$

Nun ist:

$$\frac{d\lambda}{d\sigma} = l$$

und ferner:

$$\frac{dl}{d\sigma} = -\left(\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\lambda}{r}\right)r,$$

d. h.

$$\frac{dl}{d\sigma} = \alpha\,\mathrm{tg}\,H - \lambda.$$

Folglich wird:

$$dx_1 = (l\cos\sigma - \lambda\sin\sigma)\,d\sigma.$$

Auch hieraus ergibt sich:

$$ds_1 = \varepsilon\, d\sigma.$$

Somit erhalten wir für die Richtungskosinus der Tangenten:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \varepsilon(l\cos\sigma - \lambda\sin\sigma), \\ \beta_1 &= \varepsilon(m\cos\sigma - \mu\sin\sigma), \\ \gamma_1 &= \varepsilon(n\cos\sigma - \nu\sin\sigma). \end{aligned} \quad (3)$$

Infolgedessen bekommen wir auch:

$$\Sigma\alpha\alpha_1 = 0, \quad (4)$$

[1]) Schell-Salkowski S. 52; 93.

sodaß sich die Tangenten der Krümmungsmittelpunktskurve und die der Ausgangskurve senkrecht kreuzen.[1]) Daher stehen die Normalebenen beider Kurven auf einander senkrecht, und die Normalebene der Krümmungsmittelpunktskurve ist parallel der Tangente der Ausgangskurve. Nun ist die Tangente von (C) zugleich Tangente an den über dem Radius MK der Kugel, auf der die Ausgangskurve liegt, als Durchmesser konstruierten Kreis. Also gehen die Normalebenen von (C) durch die Mitte des Radius der Kugel, auf der (M) liegt.

Wir können nun auch den Winkel bestimmen, den die Tangente von (C) mit der rektifizierenden Geraden einschließt. Wir hatten die Richtungskosinus der rektifizierenden Geraden bestimmt, die ja das Tangentenbild der rektifizierenden Gratlinie darstellten. Bezeichnen wir nun den Neigungswinkel der beiden betreffenden Geraden mit ϑ, so ist:

$$\cos\vartheta = \varepsilon[(\lambda \sin H + \alpha \cos H)(l\cos\sigma - \lambda \sin\sigma)].$$

Hieraus folgt:

$$\cos\vartheta = -\varepsilon \sin\sigma \sin H$$

oder

$$\cos\vartheta = \mp \mathfrak{r}; \tag{6}$$

d. h.

Der Kosinus der Neigung der Tangente der Krümmungsmittelpunkskurve einer sphärischen Kurve gegen die rektifizierende Gerade ist abgesehen vom Vorzeichen gleich dem Radius der ganzen Krümmung. Er ist mit positivem oder negativem Vorzeichen zu versehen, je nachdem die Ausgangskurve negative oder positive Torsion besitzt.

Dieses Ergebnis ist aber nur ein spezieller Fall eines Satzes, der für allgemeine Raumkurven gilt. Bei einer allgemeinen Raumkurve ist nämlich der Kosinus des betrachteten Neigungswinkels bestimmt durch das Verhältnis des Radius der ganzen Krümmung zum Radius der Schmiegungskugel; es ist allgemein

$$\cos\vartheta = \mp \frac{\mathfrak{r}}{R}.$$ [2])

In unserem speziellen Fall haben wir zu bedenken, daß $R = 1$ zu setzen ist.

[1]) Schell-Salkowski S. 92.
[2]) Schell-Salkowski S. 93.

Aus den Gleichungen (3) bekommen wir:

$$d\alpha_1 = \varepsilon\left[\frac{dl}{d\sigma}\cos\sigma - l\sin\sigma - \frac{d\lambda}{d\sigma}\sin\sigma - \lambda\cos\sigma\right]d\sigma.$$

Hieraus finden wir nach einigen Umformungen:

$$d\alpha_1 = \varepsilon[\alpha\,\mathrm{tg}\,H\cos\sigma - 2(\lambda\cos\sigma - l\sin\sigma)]\,d\sigma$$

und

$$\frac{d\alpha_1}{ds_1} = \alpha\,\mathrm{tg}\,H\cos\sigma - 2(\lambda\cos\sigma - l\sin\sigma),$$

sodaß wir für den Kontingenzwinkel und Krümmungsradius erhalten:

$$d\tau_1^2 = 4\,d\sigma^2 + \mathrm{tg}^2 H\cos^2\sigma\,d\sigma^2.$$

$$(7) \qquad \varrho_1 = \frac{1}{\sqrt{4 + \cos^2\sigma\,\mathrm{tg}^2 H}}.$$

Dem Kontingenzwinkel können wir die Form geben:

$$(8) \qquad d\tau_1^2 = 4\,d\sigma^2 + \cos^2\sigma\,d\tau^2.$$

Dieses Resultat können wir ebenfalls aus dem Fall einer allgemeinen Raumkurve direkt gewinnen. Der Kontingenzwinkel der Krümmungsmittelpunktskurve einer allgemeinen Raumkurve ist bestimmt durch:

$$d\tau_1^2 = (d\sigma - d\omega)^2 + \sin^2\omega\,d\tau^2. \quad ^1)$$

Dabei ist ω der Winkel des Schmiegungskugelradius gegen die Hauptnormale. Beachten wir nun, daß dieser für sphärische Kurven ausgedrückt ist durch die Eigenschaften:

$$d\omega = -d\sigma,$$
$$\sin\omega = \cos\sigma,$$

so erhalten wir auch auf diesem Wege:

$$d\tau_1^2 = 4\,d\sigma^2 + \cos^2\sigma\,d\tau^2.$$

Die Richtungskosinus l_1, m_1, n_1 der Hauptnormalen finden wir aus:

$$l_1 = \varrho_1\frac{d\alpha_1}{ds_1}.$$

Es wird:

$$l_1 = \varepsilon\frac{\alpha\,\mathrm{tg}\,H\cos\sigma - 2(\lambda\cos\sigma + l\sin\sigma)}{\sqrt{4 + \cos^2\sigma\,\mathrm{tg}^2 H}}.$$

---

1) Schell-Salkowski S. 94.

Durch Anwendung der Formel:

$$\lambda_1 = \beta_1 n_1 - \gamma_1 m_1$$

finden wir die Richtungskosinus der Binormalen. Wir bekommen:

$$\lambda_1 = -\varepsilon \frac{2\alpha + (\lambda \cos\sigma + 1 \sin\sigma)\cos\sigma \operatorname{tg} H}{\sqrt{4 + \cos^2\sigma \operatorname{tg}^2 H}}.$$

Wir können nunmehr den Winkel zwischen der Schmiegungsebene ber Kurve (C) und der Normalebene der Kurve (M) ermitteln. Es ist derselbe Winkel, den die Binormale von (C) mit der Tangente von (M) einschließt. Bezeichnen wir ihn mit δ, so ergibt sich:

$$\cos\delta = -\varepsilon \Sigma\alpha \frac{[2\alpha + (\lambda \cos\sigma + 1 \sin\sigma)\cos\sigma \operatorname{tg} H]}{\sqrt{4 + \cos^2\sigma \operatorname{tg}^2 H}}.$$

Hieraus folgt:

$$(9) \qquad \cos\delta = \frac{-2\varepsilon}{\sqrt{4 + \cos^2\sigma \operatorname{tg}^2 H}}$$

und deshalb auch:

$$(10) \qquad \sin\delta = \frac{\varepsilon \cos\sigma \operatorname{tg} H}{\sqrt{4 + \cos^2\sigma \operatorname{tg}^2 H}}$$

und schließlich:

$$(11) \qquad \operatorname{tg}\delta = -\frac{1}{2}\cos\sigma \operatorname{tg} H.$$

Mit diesem Hilfswinkel erhalten wir also für die Richtungskosinus der Haupt- und Binormalen:

$$(12) \qquad \begin{aligned} l_1 &= \alpha \sin\delta + (\lambda \cos\sigma + 1 \sin\sigma)\cos\delta, \\ m_1 &= \beta \sin\delta + (\mu \cos\sigma + m \sin\sigma)\cos\delta, \\ n_1 &= \gamma \sin\delta + (\nu \cos\sigma + n \sin\sigma)\cos\delta, \end{aligned}$$

und:

$$(13) \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha \cos\delta - (\lambda \cos\sigma + 1 \sin\sigma)\sin\delta, \\ \mu_1 &= \beta \cos\delta - (\mu \cos\sigma + m \sin\sigma)\sin\delta, \\ \nu_1 &= \gamma \cos\delta - (\nu \cos\sigma + n \sin\sigma)\sin\delta. \end{aligned}$$

Dabei ist δ der Winkel, um den man die Schmiegungsebene der Krümmungsmittelpunktskurve um ihre Tangente im positiven Sinne drehen muß, damit sie mit der Normalebene der Ausgangskurve zusammenfällt.

Wir finden den Winkel, den die Tangente von (M) mit der Schmiegungsebene von (C) einschließt, aus:

$$\cos\varphi = \Sigma\alpha[\alpha \sin\delta + (\lambda \cos\sigma + 1 \sin\sigma)\cos\delta].$$

Es wird:

$$\cos\varphi = \sin\delta$$

und also:

$$(14) \qquad \varphi = \left|\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)\right|.$$

Der Winkel, den die Tangente von (C) mit der Schmiegungsebene von (M) bildet, ergibt sich aus:

$$\cos\psi = \varepsilon\Sigma l\,(l\cos\sigma - \lambda\sin\sigma).$$

Es wird:

$$\cos\psi = \varepsilon\cos\sigma = |\sin\omega|,$$

sodaß wir erhalten:

$$(15) \qquad \psi = \left|\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)\right|.$$

Mithin bekommen wir:

$$\left|\frac{\cos\varphi}{\cos\psi}\right| = \frac{\operatorname{tg} H}{\sqrt{4 + \cos^2\sigma\operatorname{tg}^2 H}}$$

und hieraus:

$$(16) \qquad \left|\frac{\cos\varphi}{\cos\psi}\right| = \frac{d\tau}{d\tau_1},$$

sodaß wir sagen können:

Die sphärische Ausgangskurve und ihre Krümmungsmittelpunktskurve sind zwei Kurven der Art, daß die Kosinus der Neigung der Tangente jeder von ihnen gegen die Schmiegungsebene der anderen in demselben Verhältnis stehen wie ihre Kontingenzwinkel.

Dieser Satz gilt aber auch nicht nur für sphärische Kurven.[1])

Die Schmiegungsebenen beider Kurven bilden miteinander denselben Winkel χ wie ihre Binormalen. Er wird gefunden aus:

$$\cos\chi = \Sigma\lambda\,[\alpha\cos\delta - (\lambda\cos\sigma + l\sin\sigma)\sin\delta].$$

Hieraus wird:

$$\cos\chi = -\cos\sigma\sin\delta = -\sin\omega\sin\delta.$$

$$(14) \qquad \cos\chi = \sin^2\omega\frac{d\tau}{d\tau_1};^{1})$$

d. h.:

Der Kosinus der Neigung der Schmiegungsebenen von (M) und (C) ist das Produkt der Kosinus der Neigungen der Tangente je einer von ihnen gegen die Schmiegungsebene der anderen.

[1]) Schell-Salkowski S. 94.

Schließlich ermitteln wir noch den Winkel $\triangle$ zwischen der Schmiegungsebene von (C) und der rektifizierenden Ebene von (M). Er wird bestimmt durch:

$$\cos\triangle = \sin\sigma\sin\delta,$$

oder

$$\cos\triangle = \cos\omega\sin\delta, \tag{18}$$

oder auch

$$\cos\triangle = \sin\omega\cos\varpi\frac{d\tau}{d\tau_1}. \tag{19}$$

Daher ist:

$$\frac{\cos\chi}{\cos\triangle} = \operatorname{tg}\omega. \tag{20}$$

Der Schmiegungswinkel der Kurve (C) einer Raumkurve berechnet sich allgemein aus:

$$d\sigma_1 = \varepsilon\,(d\tau\cos\omega - d\delta).^{1})$$

Das gibt für unseren Fall:

$$d\sigma_1 = \varepsilon(ds - d\delta). \tag{21}$$

Infolgedessen erhalten wir für den Torsionsradius:

$$r_1 = \frac{d\sigma}{ds - d\delta}. \tag{22}$$

Die Krümmungsmittelpunktskurve liegt auf der Polarfläche und somit bei sphärischen Kurven auf einem Kegel, dessen Spitze in den Kugelmittelpunkt fällt. Dieser Kegel ist auch Evolutenfläche der sphärischen Kurve.

Durch Abwickelung des Polarkegels in die Ebene geht die Krümmungsmittelpunktskurve in eine ebene Kurve über. Diese besitzt dasselbe Bogenelement ds_1, hat jedoch den Kontingenzwinkel $ds - d\omega$. Bezeichnet man ihren Krümmungsradius mit ϱ_0, so ist

$$\varrho_0 = \frac{ds_1}{d\sigma - d\omega}.^{2}) \tag{23}$$

Infolgedessen wird

$$\varrho_0 = \frac{1}{2}. \tag{24}$$

Die Krümmungsmittelpunktkurve einer sphärischen Kurve geht mithin durch Abwickelung des Polarkegels über in einen Kreis der Ebene, der den Radius $\varrho_0 = \frac{1}{2}$ besitzt. Da bei der Verbiegung

---

[1]) Schell-Salkowski.

[2]) Schell-Salkowski S. 96.

einer Ebene jeder in ihr liegende Kreis in einen geodätischen Kreis der Biegungsfläche übergeht, gilt der Satz:

Die Krümmungsmittelpunkskurven sphärischer Kurven sind geodätische Kreise auf Kegelflächen, die durch die Kegelspitze gehen.

Der zweite Teil dieses Satzes ist in der geometrischen Ermittelung des Bogenelementes enthalten.

Der Wert:

$$\frac{r_1}{\varrho_1} = \frac{d\sigma}{ds - d\delta}\sqrt{4 + \cos^2\sigma \operatorname{tg}^2 H}$$

für den Punkt K ist also gleich $\frac{4}{3}$ von dem Wert des Krümmungsmoduls des Polarkegels längs derjenigen Mantellinie, die (C) in K berührt.[1])

Den eben dargestellten Sachverhalt kann man auch folgendermaßen ausdrücken:

Der Polarkegel einer sphärischen Kurve ist eine zyklifizierende Fläche ihrer Krümmungsmittelpunktskurve.[2])

Die Krümmungsmittelpunktskurve konnte dargestellt werden mit Hilfe der Richtungskosinus der Binormalen und des Schmiegungswinkels. Da wir nun λ, μ, ν und σ gleichzeitig explizit ausdrücken können, haben wir mit den Gleichungen (1) eine von der Theorie der sphärischen Kurven unabhängige, explizite Darstellung der geodätischen Kreise auf Kegelflächen, die durch die Kegelspitze gehen. Aus den Gleichungen können wir ferner erkennen, daß sie die Hüllkurven gewisser Kugelscharen sind. Die Kugeln schneiden sich alle in einem Punkte und haben alle gleichen Radius $R = \cos\sigma$; sie berühren folglich alle eine feste Kugel.

---

§ 2.

Die Hüllkurve der Tangentialebenen an die Kugel längs der Ausgangskurve.

Legt man in den Punkten einer sphärischen Kurve die Tangentialebenen an die Kugel, so umhüllen diese eine Kurve (H).

---

[1]) Schell-Salkowski S. 96.

[2]) Heumann: Über einige Krümmungseigenschaften bei abwickelbaren Flächen und Kegelkurven. Arch. d. Math. u. Phys. (3) 6. S. 304.

Die Hüllkurve ist eine Kegelgeodätische, denn alle ihre rektifizierenden Ebenen schneiden sich im Kugelmittelpunkt, der zugleich Kegelspitze ist.[1]) Die rektifizierende Ebene der Kurve (H) geht ferner durch den entsprechenden Punkt der Ausgangskurve, da sie die Tangente in diesem Punkt enthalten muß. Demnach ist die rektifizierende Ebene der Kurve (H) Normalebene der Ausgangskurve, und wir haben den Satz:

Die Hüllkurve der Tangentialebenen an die Kugel längs der Ausgangskurve ist eine geodätische Linie des Polarkegels.

Die Tangentialebene im Punkte M mit den Koordinaten x, y, z an die Kugel hat die Gleichung:

$$\Sigma(x_2 - x)x = 0,$$

oder

$$\Sigma x_2 x = 1. \tag{1}$$

Hiernach lauten die Gleichungen der benachbarten Tangentialebenen:

$$\Sigma x_2 \alpha = 0; \tag{2}$$

$$\Sigma x_2 l = 0. \tag{3}$$

Durch Auflösung dieser drei Gleichungen nach x_2, y_2, z_2 erhalten wir die Koordinaten der Kurve (H). Aus den Gleichungen (2) und (3) finden wir:

$$x_2 = p\lambda; \tag{4}$$

während sich nun p mit Hilfe von (1) bestimmt zu:

$$p = \frac{1}{\cos\sigma}. \tag{5}$$

Folglich lauten die Gleichungen der Hüllkurve der Tangentialebenen an die Kugel längs der Ausgangskurve:

$$x_2 = \frac{\lambda}{\cos\sigma}, \qquad y_2 = \frac{\mu}{\cos\sigma}, \qquad z_2 = \frac{\nu}{\cos\sigma}. \tag{6}$$

Die Differentiation dieser Gleichungen ergibt:

$$dx_2 = (l\cos\sigma + \lambda\sin\sigma)\frac{d\sigma}{\cos^2\sigma}.$$

[1]) Schell-Salkowski S. 188. Aufg. 15.

Infolgedessen erhalten wir für das Bogenelement:

$$(7) \qquad ds_2 = \varepsilon \frac{d\sigma}{\cos^2 \sigma};$$

dabei ist $\varepsilon = \pm 1$ zu setzen, je nachdem die Ausgangskurve positive oder negative Torsion besitzt.

Der Ausdruck für das Bogenelement ist integrabel und bestimmt die Bogenlänge bei passender Lage des Anfangspunktes zu:

$$(8) \qquad s_2 = \operatorname{tg} \sigma.$$

Die Bestimmung des Vorzeichens ist eindeutig, so lange wir uns auf ein Kurvenstück beschränken, für das $0 < \sigma < \frac{\pi}{2}$ ist.

Die Richtungskosinus α_2, β_2, γ_2 der Tangenten werden:

$$(9) \qquad \begin{aligned} \alpha_2 &= \varepsilon (l \cos \sigma + \lambda \sin \sigma), \\ \beta_2 &= \varepsilon (m \cos \sigma + \mu \sin \sigma), \\ \gamma_2 &= \varepsilon (n \cos \sigma + \nu \sin \sigma). \end{aligned}$$

Demnach hat die Normalebene die Gleichung:

$$\Sigma \left(x - \frac{\lambda}{\cos \sigma} \right) (l \cos \sigma + \lambda \sin \sigma) = 0,$$

oder:

$$(10) \qquad \Sigma x (l \cos \sigma + \lambda \sin \sigma) - \operatorname{tg} \sigma = 0.$$

Ihr Abstand vom Ursprung wird also:

$$(11) \qquad q = \operatorname{tg} \sigma;$$

dies ergibt das allgemein für Kegelgeodätische geltende Resultat:

Der Abstand der Normalebene der Kurve (H) von der Kegelspitze ist gleich ihrer Bogenlänge.

Die Tangente von (H) schließt mit der rektifizierenden Geraden einen Winkel $\triangle$ ein, der bestimmt ist durch:

$$\cos \triangle = \varepsilon \Sigma (\lambda \sin H + \alpha \cos H) (l \cos \sigma + \lambda \sin \sigma).$$

Folglich wird:

$$\cos \triangle = \varepsilon \sin \sigma \sin H,$$

oder:

$$(12) \qquad \cos \triangle = \pm \mathfrak{r}.^{1})$$

---

1) Vergl. mit (6) S. 22. Es ist danach: $\triangle = 180^0 - \vartheta$, wie es auch geometrisch leicht erklärlich ist.

Der Kosinus der Neigung der Tangente an die Kurve (H) gegen die rektifizierende Gerade ist also gleich dem Radius der ganzen Krümmung; er ist mit positivem oder negativem Zeichen zu versehen, je nachdem die Torsion der Ausgangskurve positiv oder negativ ist.

Aus den Gleichungen (9) folgt:

$$d\alpha_2 = \varepsilon\left(\frac{dl}{d\sigma}\cos\sigma - l\sin\sigma + \frac{d\lambda}{d\sigma}\sin\sigma + \lambda\cos\sigma\right)d\sigma,$$

und hieraus nach einigen Umformungen:

$$d\alpha_2 = \varepsilon\,\alpha\,\mathrm{tg}\,H\cos\sigma\,d\sigma,$$

sodaß wir für den Kontingenzwinkel erhalten:

$$(13) \qquad d\tau_2 = \varepsilon\,\mathrm{tg}\,H\cos\sigma\,d\sigma.$$

Damit ist dann der Krümmungsradius ausgedrückt durch:

$$(14) \qquad \varrho_2 = \frac{1}{\mathrm{tg}\,H\cos^3\sigma}.$$

Die Richtungskosinus der Hauptnormalen ergeben sich aus:

$$l_2 = \frac{d\alpha_2}{d\tau_2} = \frac{\varepsilon\,\alpha\,\mathrm{tg}\,H\cos\sigma\,d\sigma}{\varepsilon\,\mathrm{tg}\,H\cos\sigma\,d\sigma}.$$

Sie werden also:

$$(15) \qquad l_2 = \alpha, \quad m_2 = \beta, \quad n_2 = \gamma.$$

Dieses Ergebnis ist auch geometrisch evident. Die Hauptnormale steht auf der entsprechenden rektifizierenden Ebene senkrecht, und diese ist Normalebene der Ausgangskurve.

Wir haben also den Satz:

Das Hauptnormalenbild der Hüllkurve (H) ist das Tangentenbild der ursprünglichen Kurve.

Wir erkennen ferner, daß benachbarte Hauptnormalen von (H) denselben Winkel einschließen, wie benachbarte Tangenten von (M). Mithin ist:

$$(16) \qquad dk_2 = d\tau,$$

und für den Radius der ganzen Krümmung erhalten wir:

$$(17) \qquad r_2 = \frac{\varepsilon\,d\sigma}{\cos^2\sigma\,d\tau}.$$

Die Richtungskosinus der Binormalen finden wir auf die bekannte Art. Sie werden:

$$(18) \qquad \begin{aligned} \lambda_2 &= \varepsilon\,(l\sin\sigma - \lambda\cos\sigma), \\ \mu_2 &= \varepsilon\,(m\sin\sigma - \mu\cos\sigma), \\ \nu_2 &= \varepsilon\,(n\sin\sigma - \nu\cos\sigma). \end{aligned}$$

Folglich hat die Schmiegungsebene die Gleichung:

$$\Sigma\left(x - \frac{\lambda}{\cos\sigma}\right)(l\sin\sigma - \lambda\cos\sigma) = 0,$$

oder:

$$(19) \qquad \Sigma x(l\sin\sigma - \lambda\cos\sigma) + 1 = 0.$$

Den Gleichungen (18) können wir auch die Form geben:

$$(20) \qquad \lambda_2 = \varepsilon x, \quad \mu_2 = \varepsilon y, \quad \nu_2 = \varepsilon z.$$

Infolgedessen ist:

$$(21) \qquad d\sigma_2 = \varepsilon\, ds.$$

Hiermit finden wir für den Torsionsradius:

$$(22) \qquad r_2 = \frac{1}{r\cos^2\sigma}.$$

Die Resultate für den Krümmungs- und Torsionsradius ergeben:

$$(23) \qquad \frac{r_2}{\varrho_2} = \frac{\operatorname{tg} H\cos^3\sigma}{r\cos^2\sigma},$$

d. h.

$$\frac{r_2}{\varrho_2} = -\cot\sigma,$$

und hieraus folgt:

$$(24) \qquad \frac{r_2}{\varrho_2} = -\frac{1}{s_2}.$$

Das ist aber die natürliche Gleichung für Kegelgeodätische.[1])

Wir erhalten ferner:

$$\operatorname{tg} H_2 = -\cot\sigma.$$

Folglich ist:

$$\frac{dH_2}{\cos^2 H_2} = \frac{d\sigma}{\sin^2\sigma},$$

d. h.

$$(25) \qquad dH_2 = \varepsilon\, d\sigma.$$

a) Das Tangentenbild der Kurve (H).

Wir wollen die Koordinaten dieses Tangentenbildes mit x_3, y_3, z_3 bezeichnen. Es hat dann die Gleichungen:

$$(26) \qquad \begin{aligned} x_3 &= \varepsilon(l\cos\sigma + \lambda\sin\sigma), \\ y_3 &= \varepsilon(m\cos\sigma + \mu\sin\sigma), \\ z_3 &= \varepsilon(n\cos\sigma + \nu\sin\sigma). \end{aligned}$$

Deren Differention ergibt:

$$dx_3 = \varepsilon\alpha\operatorname{tg} H\cos\sigma\, d\sigma,$$

[1]) Schell-Salkowski S. 68.

sodaß das Bogenelement

(27) $$ds_3 = \varepsilon \operatorname{tg} H \cos\sigma \, d\sigma$$

wird, und die Richtungskosinus der Tangenten die Form annehmen:

(28) $$\alpha_3 = \alpha, \quad \beta_3 = \beta, \quad \gamma_3 = \gamma.$$

Das Tangentenbild der Kurve (H) und das der Ausgangskurve sind also parallele Raumkurven.

Wir erhalten ferner:

(29) $$d\tau_3 = d\tau;$$

(30) $$l_3 = l, \quad m_3 = m, \quad n_3 = n;$$

(31) $$dk_3 = dk;$$

(32) $$\lambda_3 = \lambda, \quad \mu_3 = \mu, \quad \nu_3 = \nu;$$

(33) $$d\sigma_3 = \varepsilon \, d\sigma.$$

Der Krümmungsradius wird:

(34) $$\varrho_3 = \cos\sigma,$$

und der Torsionsradius:

(35) $$r_3 = \operatorname{tg} H \cos\sigma.$$

Infolgedessen ist:

(36) $$\frac{r_3}{\varrho_3} = \operatorname{tg} H.$$

b) Das Binormalenbild der Kurve (H).

Wir geben dem Binormalenbild die Koordinaten x_4, y_4, z_4. Dann lauten die Gleichungen:

(37) $$x_4 = \varepsilon x, \quad y_4 = \varepsilon y, \quad z_4 = \varepsilon z;$$

folglich ist:

(38) $$ds_4 = ds.$$

Das Binormalenbild der Hüllkurve (H) liegt also symmetrisch zur Ausgangskurve oder fällt mit ihr zusammen, je nachdem die Ausgangskurve (M) positive oder negative Torsion besitzt.

Die Richtungskosinus der Tangenten sind:

(39) $$\alpha_4 = -\varepsilon\alpha, \quad \beta_4 = -\varepsilon\beta, \quad \gamma_4 = -\varepsilon\gamma,$$

und die der Hauptnormalen:

(40) $$l_4 = -\varepsilon l, \quad m_4 = -\varepsilon m, \quad n_4 = -\varepsilon n.$$

Die Richtungskosinus der Binormalen werden in beiden Fällen:

(41) $$\lambda_4 = \lambda, \quad \mu_4 = \mu, \quad \nu_4 = \nu.$$

Der Krümmungsradius wird:

(42) $$\varrho_4 = \sin\sigma,$$

und es ist in der Tat:

$$\varrho_3^2 + \varrho_4^2 = 1. \tag{43}$$

Für den Torsionsradius ergibt sich:

$$r_3 = \varepsilon r. \tag{44}$$

Infolge der Ergebnisse (41) und (42) fällt die Krümmungsmittelpunktskurve des Binormalenbildes von (H) mit derjenigen der Ausgangskurve zusammen.

c) Das Tangentenbild der Gratlinie der rektifizierenden Fläche der Kurve (H).

Dieses Tangentenbild ist nach einem früheren Ergebnis das gemeinsame Binormalenbild des Tangenten- und Binormalenbildes der Kurve (H). Da nun die Binormalen des Tangenten- und Binormalenbildes von (H) denjenigen der Ausgangskurve parallel sind, besteht der Satz:

Das Tangentenbild der rektifizierenden Gratlinie von (H) ist das Binormalenbild der Ausgangskurve.

Dieses Ergebnis ist auch geometrisch ersichtlich. In unserem Falle liegt die Kegelspitze im Kugelmittelpunkt, und man erhält deshalb das Bild der rektifizierenden Geraden dadurch, daß man beide Flächen sich durchdringen läßt.[1]) Der Polarkegel durchsetzt aber die Kugel im Binormalenbild.

Diese Erscheinung gilt allgemein für die Geodätischen des Polarkegels.[1]) Da nun die Filarevoluten einer beliebigen Raumkurve als Geodätische auf der Polarfläche liegen, gilt der Satz:

Das gemeinsame Tangentenbild für die Gratlinien der rektifizierenden Flächen der Filarevoluten einer sphärischen Kurve ist das Binormalenbild der Kurve.

Eine ausgezeichnete Rolle spielt die sphärische Schraubenlinie. Hierbei ist der Polarkegel ein Drehkegel,[2]) und das Tangentenbild der rektifizierenden Gratlinie also ein kleiner Kugelkreis.

[1]) Schell-Salkowski S. 68.

[2]) Schell-Salkowski S. 113.

§ 3.

Die Filarevolventen der Kurve (H).

Wir geben der Filarevolvente die Koordinaten $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$. Sie wird bestimmt aus:

$$\bar{x} = x_2 - (s_2 - a)\,\alpha_2.$$

Mit Benutzung der entsprechenden Ausdrücke für die Kurve (H) ergibt sich nach einigen Umformungen:

$$(1)\quad \begin{aligned} \bar{x} &= \lambda\cos\sigma - l\sin\sigma + a(l\cos\sigma + \lambda\sin\sigma),\\ \bar{y} &= \mu\cos\sigma - m\sin\sigma + a(m\cos\sigma + \mu\sin\sigma),\\ \bar{z} &= \nu\cos\sigma - n\sin\sigma + a(n\cos\sigma + \nu\sin\sigma).^{1}) \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Transformation $a = -\operatorname{tg}\delta$ lassen sich diese Gleichungen noch einfacher gestalten. Es wird:

$$(2)\quad \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{\cos\delta}[\lambda\cos(\sigma+\delta) - l\sin(\sigma+\delta)],\\ \bar{y} &= \frac{1}{\cos\delta}[\mu\cos(\sigma+\delta) - m\sin(\sigma+\delta)],\\ z &= \frac{1}{\cos\delta}[\nu\cos(\sigma+\delta) - n\sin(\sigma+\delta)]. \end{aligned}$$

Die Gleichungen erinnern sofort an die Darstellung der sphärischen Kurven.

Mithin erhalten wir:

$$(3)\qquad \Sigma x^2 = \frac{1}{\cos^2\delta}.$$

Wir erkennen hiermit, daß die Evolventen auf konzentrischen Kugeln zur Einheitskugel liegen. Da nun die Filarevolventen einer Raumkurve einander parallel zugeordnet sind, besteht auch der folgende Satz:

Die Filarevolventen der Hüllkurve der Tangentialebenen an die Kugel längs der Ausgangskurve sind sphärisch und der Ausgangskurve parallel zugeordnet.

Der Sachverhalt ist auch geometrisch ersichtlich, wenn man bedenkt, daß alle Krümmungsachsen und deshalb auch alle Normalebenen der Evolventen sich in der Kegelspitze schneiden.[2])

Es ist ferner:

$$(4)\quad \alpha \equiv \alpha = l_2,\quad \bar{\beta} \equiv \beta = m_2,\quad \bar{\gamma} \equiv \gamma = n_2.$$

[1]) Den ∞^1 Werten der willkürlichen Konstanten a entsprechen die ∞^1 Filarevolventen.

[2]) Schell-Salkowski S. 34.

Die Tangenten der Filarevolventen der Hüllkurve (H) sind also parallel den Hauptnormalen dieser Kurve, und ihre Hauptnormalenbilder fallen mit den Tangentenbildern der Filarevolventen zusammen.[1])

Wir erkennen endlich, daß die Krümmungsachse einer Filarevolvente die rektifizierende Gerade der Kurve (H) ist, und daß alle Evolventen als gemeinsame Polarfläche die rektifizierende Fläche von (H) haben.

Der Schmiegungswinkel wird:

$$(5) \qquad d\bar{\sigma} \equiv d\sigma = \pm d H_3.$$

Der Schmiegungswinkel der Evolvente von (H) ist gleich dem Kontingenzwinkel der Gratlinie der rektifizierenden Fläche. Das positive oder negative Zeichen gilt, je nachdem der Punkt der Evolvente auf der negativen oder positiven Hälfte der Tangente liegt.

Mit $\delta = k \cdot 360^0$ wird für $k = 0, \frac{1}{2}, 1, 2 \ldots$, d. h. für $a = 0$ stets:

$$(6) \qquad \bar{x} = x, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = z.$$

Demnach gilt der Satz:

Diejenige Filarevolvente der Kurve (H), die auf der Einheitskugel liegt, fällt mit der Ausgangskurve zusammen.

Aus den Gleichungen (2) folgt:

$$dx = -\frac{\alpha \operatorname{tg} H \sin(\sigma + \delta)\, d\sigma}{\cos \delta},$$

sodaß wir für das Bogenelement erhalten:

$$(7) \qquad d\bar{s} = \frac{\varepsilon \operatorname{tg} H \sin(\sigma + \delta)\, d\sigma}{\cos \delta}.$$

Wir bekommen ferner:

$$(8) \qquad \varrho = \frac{\sin(\sigma + \delta)}{\cos \delta},$$

$$(9) \qquad \bar{r} = \frac{\varepsilon \operatorname{tg} H \sin(\sigma + \delta)}{\cos \delta}.$$

Die Hüllkurve der Tangentialebenen an die Kugel längs einer sphärischen Schraubenlinie ist geodätische Linie eines geraden Kreiskegels. In unserem Zusammenhang erhalten wir also den Satz:

Die sphärischen Schraubenlinien sind die Evolventen der Geodätischen eines geraden Kreiskegels.[2])

[1]) Schell-Salkowski S. 34.
[2]) Schell-Salkowski S. 187. Aufg. II.

§ 4.

Beziehungen zwischen der Krümmungsmittelpunktskurve und der Hüllkurve der Tangentialebenen an die Kugel längs der Ausgangskurve.

Wir hatten gesehen, daß auf dem Polarkegel der Ausgangskurve zwei ausgezeichnete Kurven liegen, die Krümmungsmittelpunktskurve als geodätischer Kreis und die Hüllkurve der Tangentialebenen an die Kugel längs der Ausgangskurve als geodätische Linie.

Indem wir die Koordinaten beider Kurven miteinander vergleichen, finden wir zwischen diesen die Beziehung:

$$(1)\qquad x_2 = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},\quad y_2 = \frac{y_2}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},\quad z_2 = \frac{z_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},$$

oder nach x_1, y_1, z_1 aufgelöst:

$$(2)\qquad x_1 = \frac{x_2}{\Sigma x_2^2},\quad y_1 = \frac{y_2}{\Sigma x_2^2},\quad z_1 = \frac{z_2}{\Sigma x_2^2}.$$

Infolgedessen können wir den Satz aussprechen:

Die Inversion,[1]) d. h. die Transformation mittels reziproker Radien, inbezug auf die Kugel, auf der die Ausgangskurve liegt, bildet die Krümmungsmittelpunktskurve einer sphärischen Kurve ab in die Hüllkurve der Tangentialebenen an die Kugel längs der Ausgangskurve und umgekehrt diese Hüllkurve in die Krümmungsmittelpunktskurve.

Wir haben:

$$KC = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \cos\sigma,$$

$$KH = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} = \frac{1}{\cos\sigma},$$

und es besteht die Beziehung:

$$(3)\qquad KC \cdot KH = 1.$$

---

[1]) Doehlemann: Geom. Transf. II, 113.

Zwischen dem Bogenelement der Krümmungsmittelpunktskurve und dem ihrer Inversen besteht die Gleichung:

$$(4) \qquad ds_2 = \frac{ds_1}{\cos^2\sigma},$$

d. h.:

Das Verhältnis der Bogenelemente der Kurven (C) und (H) ist proportional dem Quadrat des Kosinus des Schmiegungswinkels der Ausgangskurve.

Für die Krümmungen der beiden Kurven war gefunden worden:

$$\frac{1}{\varrho_1^2} = 4 + \operatorname{tg}^2 H \cos^2\sigma,$$

$$\frac{1}{\varrho_2^2} = \operatorname{tg}^2 H \cos^6\sigma.$$

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$\operatorname{tg}^2 H = \frac{1 - 4\varrho_1^2}{\varrho_1^2 \cos^2\sigma},$$

und hiermit ergibt sich aus der zweiten:

$$(5) \qquad \left(\frac{1}{\varrho_2}\right)^2 = \frac{1 - 4\varrho_1^2}{\varrho_1^2} \cos^4\sigma.$$

Für die Torsion der Hüllkurve erhalten wir:

$$(6) \qquad \frac{1}{r_2} = \varepsilon \frac{ds}{ds_1} \cos^2\sigma.$$

---

§ 5.

Die Krümmungsmittelpunktskurve des Tangenten- und Binormalenbildes.

Die Krümmungsmittelpunktskurve (C_1) des Tangentenbildes von (M) steht zu ihm in derselben Beziehung wie die Krümmungsmittelpunktskurve (C) zur Kurve (M) selbst. Bezeichnen wir die Koordinaten von (C_1) mit x'_1, y'_1, z'_1, so lauten demnach ihre Gleichungen:

$$(1) \qquad \begin{aligned} x'_1 &= \cos H\,(\alpha \cos H + \lambda \sin H), \\ y'_1 &= \cos H\,(\beta \cos H + \mu \sin H), \\ z'_1 &= \cos H\,(\gamma \cos H + \nu \sin H), \end{aligned}$$

und das Bogenelement wird:

$$(2) \qquad ds'_1 = \varepsilon\, dH.$$

Für die Richtungskosinus der Tangenten erhalten wir:

$$(3)\qquad \begin{aligned} \alpha'_1 &= \lambda\cos(2\,H) - \alpha\sin(2\,H),\\ \beta'_1 &= \mu\cos(2\,H) - \beta\sin(2\,H),\\ \gamma'_1 &= \nu\cos(2\,H) - \gamma\sin(2\,H). \end{aligned}$$

Folglich gilt der Satz:

Das Tangentenbild der Krümmungsmittelpunktskurve des Tangentenbildes fällt mit der Kurve zusammen, in der die Binormalen des Binormalenbildes die Kugel durchstoßen.

Der Kontingenzwinkel ist bestimmt durch:

$$(4)\qquad (d\tau'_1)^2 = 4\,dH^2 + \cos^2 H\,dk^2,$$

und der Krümmungsradius durch:

$$(5)\qquad \varrho'_1 = \frac{1}{\sqrt{4 + \cos^2 H\left(\frac{dk}{dH}\right)^2}}.$$

Die Richtungskosinus der Hauptnormalen nehmen die Form an:

$$(6)\qquad \begin{aligned} l'_1 &= l\sin\triangle + [\alpha\cos(2\,H) + \lambda\sin(2\,H)]\cos\triangle,\\ m'_1 &= m\sin\triangle + [\beta\cos(2\,H) + \mu\sin(2\,H)]\cos\triangle,\\ n'_1 &= n\sin\triangle + [\gamma\cos(2\,H) + \nu\sin(2\,H)]\cos\triangle. \end{aligned}$$

Dabei ist der eingeführte Winkel $\triangle$ bestimmt durch:

$$\sin\triangle = \frac{\cos H\frac{dk}{dH}}{\sqrt{4 + \cos^2 H\left(\frac{dk}{dH}\right)^2}},$$

$$\cos\triangle = \frac{-2}{\sqrt{4 + \cos^2 H\left(\frac{dk}{dH}\right)^2}}.$$

Es ist derjenige Winkel, durch den man die Schmiegungsebene von (C_1) um die Tangente im positiven Sinne drehen muß, damit sie mit der Normalebene des Tangentenbildes der Ausgangskurve zusammenfällt.

Die Richtungskosinus der Binormalen werden:

$$(7)\qquad \begin{aligned} \lambda'_1 &= l\cos\triangle - [\alpha\cos(2\,H) + \lambda\sin(2\,H)]\sin\triangle,\\ \mu'_1 &= m\cos\triangle - [\beta\cos(2\,H) + \eta\sin(2\,H)]\sin\triangle,\\ \nu'_1 &= n\cos\triangle - [\gamma\cos(2\,H) + \nu\sin(2\,H)]\sin\triangle. \end{aligned}$$

Der Schmiegungswinkel ist

$$(8)\qquad d\sigma'_1 = d\tau - d\triangle$$

und der Torsionsradius

$$r'_1 = \frac{\varepsilon\, dH}{d\tau - d\triangle}. \tag{9}$$

Die Krümmungsmittelpunktskurve (C_2) des Binormalenbildes verhält sich zu demselben wie die Krümmungsmittelpunktskurve (C) zur Ausgangskurve selbst. Wir geben den Koordinaten ihrer Punkte die Bezeichnung x'_2, y'_2, z'_2 und finden für sie die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} x'_2 &= \sin H(\alpha \cos H + \lambda \sin H), \\ y'_2 &= \sin H(\beta \cos H + \mu \sin H), \\ z'_2 &= \sin H(\gamma \cos H + \nu \sin H). \end{aligned} \tag{10}$$

Demnach bestehen zwischen den Koordinaten der Kurven (C_1) und (C_2) die Beziehungen:

$$\frac{x'_2}{x'_1} = \frac{y'_2}{y'_1} = \frac{z'_2}{z'_1} = \operatorname{tg} H. \tag{11}$$

Das Verhältnis der entsprechenden Koordinaten der Kurven (C_1) und (C_2) ist gleich dem negativen Verhältnis der beiden Krümmungen von (M).

Da das Binormalenbild und das Tangentenbild parallele Raumkurven sind, ergibt sich, daß die Kurven (C_1) und (C_2) dasselbe Bogenelement besitzen.

Die Richtungskosinus der Tangenten werden:

$$\begin{aligned} \alpha'_2 &= \lambda \sin(2H) + \alpha \cos(2H), \\ \beta'_2 &= \mu \sin(2H) + \beta \cos(2H), \\ \gamma'_2 &= \nu \sin(2H) + \gamma \cos(2H), \end{aligned} \tag{12}$$

d. h.:

Das Tangentenbild der Kurve (C_2) fällt mit der Kurve zusammen, in der die Hauptnormalen des Tangentenbildes die Kugel durchstoßen.

Wir erhalten ferner die Beziehung:

$$\Sigma \alpha'_1 \alpha'_2 = 0, \tag{13}$$

sodaß die Tangenten der Kurven (C_1) und (C_2) sich rechtwinklig kreuzen.

Für den Kontingenzwinkel finden wir:

$$(d\tau'_2)^2 = 4\, dH^2 + \sin^2 H\, dk^2, \tag{14}$$

und für den Krümmungsradius:

$$\varrho'_2 = \frac{1}{\sqrt{4 + \sin^2 H \left(\frac{dk}{dH}\right)^2}}. \tag{15}$$

Demnach gelten zwischen den Kontingenzwinkeln und den Krümmungsradien von (C_1) und (C_2) die Gleichungen:

(16) $$(d\tau'_1)^2 + (d\tau'_2)^2 = 8\,dH^2 + dk^2$$

und

(17) $$\left(\frac{1}{\varrho'_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\varrho'_2}\right)^2 = 8 + \left(\frac{dk}{dH}\right)^2.$$

Für die Richtungskosinus der Hauptnormalen bekommen wir:

(18)
$$\begin{aligned} l'_2 &= l\sin\triangle_1 + [\alpha\sin(2H) - \lambda\cos(2H)]\cos\triangle_1, \\ m'_2 &= m\sin\triangle_1 + [\beta\sin(2H) - \mu\cos(2H)]\cos\triangle_1, \\ n'_2 &= n\sin\triangle_1 + [\gamma\sin(2H) - \nu\cos(2H)]\cos\triangle_1. \end{aligned}$$

Dabei ist der Winkel $\triangle_1$ bestimmt durch die Gleichungen:

$$\sin\triangle_1 = \frac{\sin H\left(\frac{dk}{dH}\right)}{\sqrt{4 + \sin^2 H\left(\frac{dk}{dH}\right)^2}},$$

$$\cos\triangle_1 = \frac{-2}{\sqrt{4 + \sin^2 H\left(\frac{dk}{dH}\right)^2}}.$$

Es ist der Winkel, durch den man die Schmiegungsebene von (C_2) um die Tangente im positiven Sinne drehen muß, damit sie mit der rektifizierenden Ebene von (M) zusammenfällt.

Zwischen den Winkeln $\triangle$ und $\triangle_1$ besteht die Relation:

$$\frac{1}{\sin^2\triangle} + \frac{1}{\sin^2\triangle_1} = 2 + \frac{1}{4}\left(\frac{dk}{dH}\right)^2.$$

Die Richtungskosinus der Binormalen sind:

(20)
$$\begin{aligned} \lambda'_2 &= l\cos\triangle_1 - [\alpha\sin(2H) - \lambda\cos(2H)]\sin\triangle_1, \\ \mu'_2 &= m\cos\triangle_1 - [\beta\sin(2H) - \mu\cos(2H)]\sin\triangle_1, \\ \nu'_2 &= n\cos\triangle_1 - [\gamma\sin(2H) - \nu\cos(2H)]\sin\triangle_1. \end{aligned}$$

Der Schmiegungswinkel wird:

(21) $$d\sigma'_2 = d\sigma - d\triangle_1,$$

und der Torsionsradius:

(22) $$r'_2 = \frac{\varepsilon\,dH}{d\sigma - d\triangle_1}.$$

§ 6.

Die Hüllkurve der Tangentialebenen an die Kugel längs des Tangenten- und Binormalenbildes.

Die Hüllkurve (H_1) der Tangentialebenen an die Kugel längs des Tangentenbildes besitze die Koordinaten x_1'', y_1'', z_1''. Sie steht zum Tangentenbild von (M) in derselben Beziehung, wie die Kurve (H) zur Kurve (M). Ihre Gleichungen lauten demnach:

$$(1)\qquad x_1'' = \frac{\alpha\cos H + \lambda \sin H}{\cos H},$$

$$y_1'' = \frac{\beta\cos H + \mu \sin H}{\cos H},$$

$$z_1'' = \frac{\gamma\cos H + \nu \sin H}{\cos H}.$$

Das Bogenelement wird:

$$(2)\qquad ds_1'' = \frac{\varepsilon\, dH}{\cos^2 H}$$

und daher:

$$(3)\qquad s_1'' = \varepsilon \operatorname{tg} H.$$

Für die Richtungskosinus der Tangenten finden wir:

$$(4)\qquad \alpha_1'' = \varepsilon\lambda, \qquad \beta_1'' = \varepsilon\mu, \qquad \gamma_1'' = \varepsilon\nu.$$

Die Kurven (H_1) und (M) sind also einander derart zugeordnet, daß die Tangenten von (H_1) parallel den Binormalen von (M) sind, d. h.

Das Tangentenbild der Hüllkurve (H_1) ist das Binormalenbild der Kurve (M) oder liegt zu ihm symmetrisch, je nachdem (M) positive oder negative Torsion besitzt.

Daher müssen notwendig die Hauptnormalen beider Kurven parallel sein, und wir erhalten auch in der Tat:

$$(5)\qquad l_1'' = l, \qquad m_1'' = m, \qquad n_1'' = n.$$

Die Hauptnormalenbilder beider Kurven fallen zusammen.

Endlich ergibt sich noch mit einem früheren Ergebnis:

Das Tangentenbild der Hüllkurve (H_1) ist das Tangentenbild der Gratlinie der rektifizierenden Fläche von (H), falls (M) positive Torsion besitzt.[1])

[1]) S. 33.

Die Richtungskosinus der Binormalen werden:

$$\lambda_1'' = -\varepsilon\alpha, \quad \mu_1'' = -\varepsilon\beta, \quad \nu_1'' = -\varepsilon\gamma; \tag{6}$$

d. h.

Das Binormalenbild von (H_1) fällt mit dem Tangentenbild von (M) zusammen oder liegt ihm symmetrisch, je nachdem (M) negative oder positive Torsion besitzt.

Wir erhalten für den Kontingenzwinkel, Schmiegungswinkel und Winkel der ganzen Krümmung die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} d\tau_1'' &= \varepsilon\, d\sigma, \\ d\sigma_1'' &= \varepsilon\, d\tau, \\ dk_1'' &= dk. \end{aligned} \tag{7}$$

Der Krümmungs- und der Torsionsradius sind bestimmt durch:

$$\varrho_1'' = \frac{1}{\cos^2 H}\frac{\varepsilon\, dH}{d\sigma}, \tag{8}$$

$$r_1'' = \frac{1}{\cos^2 H}\frac{\varepsilon\, dH}{d\tau}, \tag{9}$$

sodaß wir bekommen:

$$\frac{r_1''}{\varrho_1''} = \frac{d\sigma}{d\tau} = -\cot H, \tag{10}$$

oder:

$$\frac{r_1''}{\varrho_1''} = -\frac{1}{s''}. \tag{11}$$

Der Radius der ganzen Krümmung wird:

$$r_1'' = \frac{\varepsilon\, dH}{dk\cos^2 H}. \tag{12}$$

Die Koordinaten der Punkte der Hüllkurve (H_2) der Tangentialebenen an die Kugel längs des Binormalenbildes bezeichnen wir mit x''_2, y''_2, z''_2. Die Gleichungen sind:

$$\begin{aligned} x_2'' &= \frac{\lambda \sin H + \alpha\cos H}{\sin H}, \\ y_2'' &= \frac{\mu \sin H + \beta\cos H}{\sin H}, \\ z_2'' &= \frac{\nu \sin H + \gamma\cos H}{\sin H}. \end{aligned} \tag{13}$$

Zwischen den Koordinaten der Kurven (H_1) und (H_2) gelten also die Beziehungen:

$$\frac{x_2''}{x_1''} = \frac{y_2''}{y_1''} = \frac{z_2''}{z_1''} = \cot H. \tag{14}$$

Durch Vergleich mit den entsprechenden Formeln bei der Krümmungsmittelpunktskurve des Tangenten- und Binormalenbildes finden wir:

$$\frac{x_2''}{x_1''} = \frac{x_1'}{x_2'},$$

$$\frac{y_2''}{y_1''} = \frac{y_1'}{y_2'}, \tag{15}$$

$$\frac{z_2''}{z_1''} = \frac{z_1'}{z_2'};$$

d. h.

Das Verhältnis entsprechender Koordinaten der Hüllkurven (H_2) und (H_1) ist gleich dem der entsprechenden Koordinaten der Krümmungsmittelpunktskurven (C_1) und (C_2).

Das Bogenelement der Kurve (H_2) wird:

$$ds_2'' = \frac{\varepsilon\, dH}{\sin^2 H}, \tag{16}$$

sodaß sich zwischen den Bogenelementen beider Kurven die Beziehung ergibt:

$$\frac{ds_1''}{ds_2''} = \operatorname{tg}^2 H. \tag{17}$$

Die Richtungskosinus der Tangenten werden

$$\alpha_2'' = -\varepsilon\alpha, \quad \beta_2'' = -\varepsilon\beta, \quad \gamma_2'' = -\varepsilon\gamma, \tag{18}$$

Die Richtungskosinus der Haupt- und Binormalen nehmen die Gestalt an:

$$l_2'' = l, \quad m_2'' = m, \quad n_2'' = n; \tag{19}$$

$$\lambda_2'' = \varepsilon\lambda, \quad \mu_2'' = \varepsilon\mu, \quad \nu_2'' = \varepsilon\nu. \tag{20}$$

Die Parallelität der Kurven (H_2) und (M) bestimmt sofort den Kontingenzwinkel, Schmiegungswinkel und Winkel der ganzen Krümmung:

Der Krümmungsradius wird:

$$\varrho_2'' = \frac{dH}{d\tau \sin^2 H}. \tag{21}$$

Folglich erhalten wir:

$$\frac{\varrho_2''}{\varrho_1''} = \operatorname{cot}^3 H. \tag{22}$$

Für den Torsionsradius ermitteln wir:

$$r_2'' = \frac{dH}{d\sigma \sin^2 H}. \tag{23}$$

Es ist also:

$$\frac{r_2''}{r_1''} = -\cot H, \tag{24}$$

und deshalb haben wir auch mit

$$\frac{r_2''}{\varrho_2''} = -\operatorname{tg} H; \tag{25}$$

$$\varrho_1'' \varrho_2'' = r_1'' r_2''. \tag{26}$$

III. Abschnitt.

Die sphärischen Evoluten und Evolventen.

§ 1.

Der sphärische Krümmungsradius.

Wir definieren, analog der Definition in der Ebene, den sphärischen Krümmungspunkt C′ einer Kurve als denjenigen Punkt, dessen sphärische Abstände von drei benachbarten Punkten der Kurve einander gleich sind. Er liegt also auf den größten Kreisen, die in

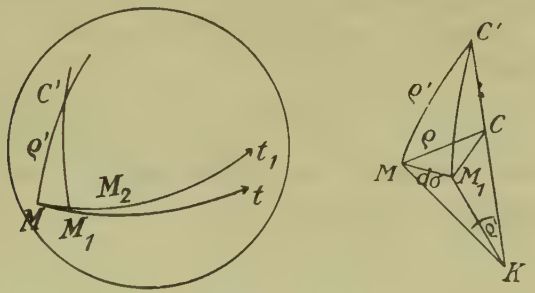

Fig. 5.

M und M_1 auf den sphärischen Tangenten MM_1 und M_1M_2 senkrecht stehen. Die Pole dieser größten Kreise sind die Tangentenbilder t und t_1. Mithin schließen diese größten Kreise einen Winkel ein, der gleich dem Bogenelement des Tangentenbildes, d. h. gleich dem Kontingenzwinkel ist; d. h.:

$$MC'M_1 = MCM_1 = d\tau.$$

Der Krümmungsmittelpunkt C im gewöhnlichen Sinne liegt mit dem sphärischen Krümmungsmittelpunkt auf demselben Kugelradius, denn C liegt auf den Loten, die in M und M_1 auf den entsprechenden Tangenten senkrecht stehen. Infolgedessen liegt C in den Ebenen $MC'K$ und $M_1C'K$ und damit auf KC'.

Der sphärische Krümmungsradius ist $MC' = \varrho'$. Wir erkennen die Beziehung:

$$MC = MK \sin \varrho',$$

und hieraus folgt:

(1) $$\sin \varrho' = \varrho.$$

Andererseits wissen wir, daß $\varrho = \sin \sigma$ ist, sodaß wir erhalten:

(2) $$\sin \varrho' = \sin \sigma.$$

Es besteht also der Satz:

Der sphärische Krümmungsradius ist gleich dem Torsionswinkel.

Bei der Betrachtung des Tangentenbildes hatten wir gefunden:

$$\sin \sigma_1 = \sin H.$$

Folglich ist:

(3) $$\varrho'_1 = H.$$

Der sphärische Krümmungsradius des Tangentenbildes ist gleich dem Winkel, den die Tangente mit der rektifizierenden Geraden einschließt.

Beim Binormalenbild war:

$$\sin \sigma_3 = -\cos H = \cos(\pi - H).$$

Infolgedessen ist:

(4) $$\varrho'_3 = \left| H - \frac{\pi}{2} \right|.$$

Die Differenz der sphärischen Krümmungsradien des Tangenten- und Binormalenbildes ist gleich $\frac{\pi}{2}$.

§ 2.

Die sphärische Evolute.

Die stetige Folge der sphärischen Krümmungsmittelpunkte bildet eine Kurve auf der Kugel, die man die sphärische Evolute der Ausgangskurve nennt. Die Koordinaten des sphärischen Krümmungsmittelpunktes seien x_1, y_1, z_1. Das sphärische Lot im Punkte M der Ausgangskurve ist senkrecht zur Richtung α, β, γ. Mithin lautet die Gleichung der Ebene des entsprechenden größten Kugelkreises:

(1) $$\Sigma (x_1 - x) \alpha = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\Sigma x_1 \alpha = 0.$$

Die Gleichung der benachbarten Ebene lautet hiernach:

(2) $$\Sigma x_1 l = 0,$$

sodaß wir als Bedingungsgleichungen der sphärischen Evolute die folgenden erhalten:

(3) $$\Sigma x_1 \alpha = 0, \quad \Sigma x_1 l = 0, \quad \Sigma x_1^2 = 1.$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar:

(4) $$x_1 = \pm\lambda, \quad y_1 = \pm\mu, \quad z_1 = \pm\nu.$$

Die verschiedenen Vorzeichen geben inbezug auf den Kugelmittelpunkt symmetrische Kurven. Wir wählen im folgenden das positive Zeichen.

Den oben gefundenen Gleichungen zufolge gilt der Satz:

Die sphärische Evolute einer sphärischen Kurve ist das Binormalenbild der Kurve.[1])

Dieser Satz ergibt sich auch durch geometrische Überlegung. Die Binormale steht auf zwei benachbarten Tangenten senkrecht. Ihr Bild liegt somit auf den Bildkreisen zweier benachbarten Normalebenen in ihrem Schnittpunkte C'. Die Kurve (M) ist also Orthogonaltrajektorie der Kurve (C'). Das stellt aber die charakteristische Eigenschaft der Evolvente dar. Spannt man über die Kugel einen Faden, der auf der Kurve (C') aufgewickelt ist, so wird bei der Abwickelung des Fadens die Kurve (M) beschrieben.[2])

Aus der eben dargestellten Beziehung geht der Satz hervor:

Zwei sphärische Kurven haben dann und nur dann dieselbe sphärische Evolute, wenn sie Parallelkurven von einander sind.

Dies ist in gewissem Sinne das sphärische Analogon desselben Satzes in der Ebene. Er besagt jedoch wesentlich mehr. In der Ebene kann man je zwei Kurven sich parallel zuordnen, also im allgemeinen Sinne zwei beliebige Kurven als Parallelkurven ansehen, auf der Kugel gibt es solche Parallelkurven im weiteren Sinne aber nicht.

Die bei der Bestimmung des Binormalenbildes gefundenen Resultate und Sätze gelten also unmittelbar für die sphärische Evolute. Als besonders wichtig wollen wir den folgenden nennen:

---

[1]) Schell-Salkowski S. 186.
[2]) Schell-Salkowski S. 65.

Das Tangentenbild der Gratlinie der rektifizierenden Fläche ist die gemeinsame sphärische Evolute des Tangenten- und Binormalenbildes der Grundkurve.[1])

§ 3.

Die zweite sphärische Evolute.

Die Koordinaten der zweiten sphärischen Evolute wollen wir mit x_2, y_2, z_2 bezeichnen. Analog den Betrachtungen über die erste sphärische Evolute haben wir anzusetzen:

$$x_2 = \lambda_1, \quad y_2 = \mu_1, \quad z_2 = \nu_1.$$

Danach erhalten wir die Gleichungen der zweiten sphärischen Evolute in der folgenden Form:

$$(1) \qquad \begin{aligned} x_2 &= \alpha \cos H + \lambda \sin H, \\ y_2 &= \beta \cos H + \mu \sin H, \\ z_2 &= \gamma \cos H + \nu \sin H. \end{aligned}$$

Durch Vergleich mit den Formeln, die sich auf die Binormalen des Tangentenbildes beziehen,[2]) erhalten wir also den Satz:

Die zweite sphärische Evolute der Grundkurve ist die erste sphärische Evolute des Tangentenbildes.

Dieses Ergebnis ist die Folge davon, daß die erste sphärische Evolute und das Tangentenbild parallele Raumkurven sind.

In diesem Zusammenhang ergibt sich ferner der Satz:

Die zweite sphärische Evolute der Grundkurve ist das Tangentenbild der Gratlinie der rektifizierenden Fläche.

Ihr Bogenelement ist also gleich dem Kontingenzwinkel dieser Gratlinie:

$$(2) \qquad ds_2 = \varepsilon dH.$$

Infolge dieses Resultates gilt der Satz:

Die zweite sphärische Evolute und die Krümmungsmittelpunktskurve des Tangentenbildes sowie die der ersten sphärischen Evolute besitzen gleiches Bogenelement.

---

[1]) Schell-Salkowski S. 65.

[2]) S. 9.

Aus den Gleichungen (1) ergibt sich:

$$dx_2 = (\lambda \cos H - \alpha \sin H)\, dH,$$

sodaß die Richtungskosinus der Tangenten dargestellt werden durch:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \varepsilon(\lambda \cos H - \alpha \sin H), \\ \beta_2 &= \varepsilon(\mu \cos H - \beta \sin H), \\ \gamma_2 &= \varepsilon(\nu \cos H - \gamma \sin H). \end{aligned} \tag{3}$$

Ein Vergleich mit den Richtungskosinus der Tangenten des Hauptnormalenbildes läßt erkennen, daß die zweite sphärische Evolute und das Hauptnormalenbild parallele Raumkurven sind. Die Tangenten beider Kurven sind gleich gerichtet, wenn die Ausgangskurve positive, sie sind entgegengesetzt gerichtet, wenn sie negative Torsion besitzt.

Bildet man:

$$d\alpha_2 = \varepsilon\,[(\lambda' \cos H - \alpha' \sin H)\, ds - (\alpha \cos H + \lambda \sin H)\, dH],$$

oder:

$$d\alpha_2 = -\varepsilon\left[\left(\frac{1}{r}\frac{r}{r} + \frac{1}{\varrho}\frac{r}{\varrho}\right) ds + (\alpha \cos H + \lambda \sin H)\, dH\right],$$

so ergibt sich nach einigen Umformungen:

$$d\alpha_2 = -\varepsilon\,[l\, dk + (\alpha \cos H + \lambda \sin H)\, dH].$$

Folglich besteht für den Kontingenzwinkel die Gleichung:

$$d\tau_2 = \sqrt{dk^2 + dH^2}. \tag{4}$$

Das ist der bekannte Ausdruck für den Winkel der ganzen Krümmung der Gratlinie der rektifizierenden Fläche.

Zur Darstellung des Krümmungsradius bilden wir:

$$\frac{d\alpha_2}{ds_2} = -\left[\frac{1}{r}\frac{ds}{dH} + (\alpha \cos H + \lambda \sin H)\right].$$

Hiernach wird:

$$\left(\frac{1}{\varrho_2}\right)^2 = \frac{1}{r^2}\left(\frac{ds}{dH}\right)^2 + 1,$$

oder:

$$\varrho_2 = \frac{r\, dH}{\sqrt{ds^2 + r^2\, dH^2}}. \tag{5}$$

Die Richtungskosinus der Hauptnormalen werden also:

$$l_2 = -\frac{r\, dH}{\sqrt{ds^2 + r^2\, dH^2}}\frac{1}{r}\frac{ds}{dH} - (\alpha \cos H + \lambda \sin H)\frac{r\, dH}{\sqrt{ds^2 + r^2\, dH^2}},$$

und nach Vereinfachung dieses Ausdruckes:

$$l_2 = -\frac{l\, ds}{\sqrt{ds^2 + r^2\, dH^2}} - (\alpha \cos H + \lambda \sin H)\frac{r\, dH}{\sqrt{ds^2 + r^2\, dH^2}}.$$

Nun bestehen aber wegen $\varrho_2 = \sin\sigma_2$ die folgenden Beziehungen:

$$\sin\sigma_2 = \frac{r\,dH}{\sqrt{ds^2 + r^2\,dH^2}},$$

$$\cos\sigma_2 = \frac{ds}{\sqrt{ds^2 + r^2\,dH^2}}.$$

Dieser Wert stellt den Abstand des Kugelmittelpunktes vom Krümmungsmittelpunkt der zweiten sphärischen Evolute dar. Also besteht der Satz:

Der Abstand des Kugelmittelpunktes vom Krümmungsmittelpunkt der zweiten sphärischen Evolute ist gleich dem Krümmungsradius des Hauptnormalenbildes.

Wir erhalten ferner:

$$\operatorname{tg}\sigma_2 = r\frac{dH}{ds}.$$

Infolgedessen wird der Neigungswinkel des Kugelradius gegen die Hauptnormale der zweiten sphärischen Evolute:

$$\text{(6)} \qquad \operatorname{tg}\omega_2 = \frac{dk}{dH}.$$

Nunmehr werden die Richtungskosinus der Haupt- und Binormalen die Gestalt annehmen:

$$\text{(7)} \quad \begin{aligned} l_2 &= -[l\cos\sigma_2 + (\alpha\cos H + \lambda\sin H)\sin\sigma_2], \\ m_2 &= -[m\cos\sigma_2 + (\beta\cos H + \mu\sin H)\sin\sigma_2], \\ n_2 &= -[n\cos\sigma_2 + (\gamma\cos H + \nu\sin H)\sin\sigma_2], \end{aligned}$$

und:

$$\text{(8)} \quad \begin{aligned} \lambda_2 &= \varepsilon[(\alpha\cos H + \lambda\sin H)\cos\sigma_2 - l\sin\sigma_2], \\ \mu_2 &= \varepsilon[(\beta\cos H + \mu\sin H)\cos\sigma_2 - m\sin\sigma_2], \\ \nu_2 &= \varepsilon[(\gamma\cos H + \nu\sin H)\cos\sigma_2 - n\sin\sigma_2]. \end{aligned}$$

Den Schmiegungswinkel ermitteln wir aus der zu fordernden Beziehung:

$$d\sigma_2 = dH_1.$$

Nun hatten wir aber bei der Betrachtung des Tangenten- und Binormalenbildes gefunden, daß sich H_1 ausdrücken läßt durch:

$$\operatorname{tg} H_1 = \frac{dk}{dH},$$ [1])

[1]) S. 11.

sodaß wir erhalten:

$$\frac{dH_1}{\cos^2 H_1} = d\left(\frac{dk}{dH}\right).$$

Hiermit folgt für den Schmiegungswinkel:

$$(9) \qquad d\sigma_2 = \frac{dH^2}{dk^2 + dH^2} d\left(\frac{dk}{dH}\right),$$

und der Torsionsradius wird:

$$(10) \qquad r_2 = \frac{dk^2 + dH^2}{dH} \frac{1}{d\left(\frac{dk}{dH}\right)}.$$

Bezeichnen wir jetzt für einen Augenblick die Elemente des Hauptnormalenbildes mit überstrichenen Buchstaben, so ist in der Tat:

$$l_2 = \bar{l}, \quad m_2 = \bar{m}, \quad n_2 = \bar{n};$$
$$\lambda_2 = \bar{\lambda}, \quad \mu_2 = \bar{\mu}, \quad \nu_2 = \bar{\nu}.$$

Es ist nämlich:

$$\cos\sigma_2 = \sin\bar{\sigma}.$$

Hieraus ergibt sich ferner:

$$(11) \qquad \sigma_2 = \frac{\pi}{2} - \bar{\sigma}.$$

Demnach finden wir den Satz:

Der sphärische Krümmungsradius des Hauptnormalenbildes ergänzt denjenigen der zweiten sphärischen Evolute zu $\frac{\pi}{2}$.

Mit einem früheren Ergebnisse erhalten wir auch folgenden Satz:

Die Summe der sphärischen Krümmungsradien des Hauptnormalenbildes und der zweiten sphärischen Evolute ist gleich der Differenz der sphärischen Krümmungsradien des Tangentenbildes und der ersten sphärischen Evolute.[1])

a) Die Krümmungsmittelpunktskurve der zweiten sphärischen Evolute.

Die Koordinaten wollen wir mit x'_1, y'_1, z'_1 bezeichnen. Dann lauten die Gleichungen:

$$(12) \quad \begin{aligned} x'_1 &= (\alpha\cos H + \lambda\sin H)\cos^2\sigma_2 - l\sin\sigma_2\cos\sigma_2, \\ y'_1 &= (\beta\cos H + \mu\sin H)\cos^2\sigma_2 - m\sin\sigma_2\cos\sigma_2, \\ z'_1 &= (\gamma\cos H + \nu\sin H)\cos^2\sigma_2 - n\sin\sigma_2\cos\sigma_2, \end{aligned}$$

[1]) S. 46.

und das Bogenelement ist bestimmt durch:

$$(13) \qquad ds'_1 = \frac{\varepsilon\, dH^2}{dk^2 + dH^2}\, d\left(\frac{dk}{dH}\right).$$

Die Richtungskosinus der Tangenten werden:

$$(14) \quad \begin{aligned} \alpha'_1 &= -\varepsilon\,\{\sin 2\sigma_2\,(\alpha\cos H + \lambda\sin H) + l\cos 2\sigma_2\},\\ \beta'_1 &= -\varepsilon\,\{\sin 2\sigma_2\,(\beta\cos H + \mu\sin H) + m\cos 2\sigma_2\},\\ \gamma'_1 &= -\varepsilon\,\{\sin 2\sigma_2\,(\gamma\cos H + \nu\sin H) + n\cos 2\sigma_2\}. \end{aligned}$$

Die weiteren Bestimmungsgrößen sind nun vom Krümmungsradius der zweiten sphärischen Evolute abhängig.

b) Die Hüllkurve (H_3) der Tangentialebenen an die Kugel längs der zweiten sphärischen Evolute.

Die Gleichungen sind von der Form:

$$(15) \quad \begin{aligned} x'_2 &= \alpha\cos H + \lambda\sin H - l\,tg\,\sigma_2,\\ y'_2 &= \beta\cos H + \mu\sin H - m\,tg\,\sigma_2,\\ z'_2 &= \gamma\cos H + \nu\sin H - n\,tg\,\sigma_2. \end{aligned}$$

Das Bogenelement wird:

$$(16) \qquad ds'_2 = \left(\frac{dH}{dk}\right)^2 d\left(\frac{dk}{dH}\right).$$

Hieraus ergibt sich:

$$(17) \qquad s'_2 = -\frac{dH}{dk}.$$

Die Richtungskosinus der Tangenten werden:

$$(18) \qquad \alpha'_2 = -\varepsilon l, \quad \beta'_2 = -\varepsilon m, \quad \gamma'_2 = -\varepsilon n.$$

Das Tangentenbild der Kurve (H_3) ist also identisch mit dem Hauptnormalenbild von (M) oder liegt ihm symmetrisch, je nachdem (M) negative oder positive Torsion besitzt.

Wir erhalten ferner:

$$(19) \qquad d\tau'_2 = dk,$$

und für den Krümmungsradius:

$$(20) \qquad \varrho'_2 = \frac{dH^2}{dk^3}\, d\left(\frac{dk}{dH}\right).$$

Für die Richtungskosinus der Hauptnormalen bekommen wir:

$$(21) \quad \begin{aligned} l'_2 &= \lambda\cos H - \alpha\sin H,\\ m'_2 &= \mu\cos H - \beta\sin H,\\ n'_2 &= \nu\cos H - \gamma\sin H. \end{aligned}$$

Die Hüllkurve (H_2) und die Gratlinie der rektifizierenden Fläche von (M) sind also einander so zugeordnet, daß sie in entsprechenden Punkten parallele Hauptnormalen besitzen.

In derselben Beziehung steht die Hüllkurve (H_2) zum Tangentenbild von (M) und der ersten sphärischen Evolute der Grundkurve.

Der Winkel der ganzen Krümmung wird:

$$(22) \qquad dk'_2 = \sqrt{dk^2 + dH^2}.$$

Für die Richtungskosinus der Binormalen erhalten wir:

$$(23) \qquad \begin{aligned} \lambda'_2 &= -\varepsilon(\alpha \cos H + \lambda \sin H), \\ \mu'_2 &= -\varepsilon(\beta \cos H + \mu \sin H), \\ \nu'_2 &= -\varepsilon(\gamma \cos H + \nu \sin H), \end{aligned}$$

sodaß das Binormalenbild von (H_3) identisch mit der zweiten sphärischen Evolute ist oder ihr symmetrisch liegt, je nachdem (M) negative oder positive Torsion besitzt.

Der Schmiegungswinkel wird:

$$(24) \qquad d\sigma'_2 = \varepsilon\, dH,$$

und der Torsionsradius:

$$(25) \qquad r'_2 = \frac{dH}{dk^2} d\left(\frac{dk}{dH}\right).$$

Damit erhalten wir:

$$(26) \qquad \frac{r'_2}{\varrho'_2} = \frac{dk}{dH},$$

und schließlich:

$$(27) \qquad \frac{r'_2}{\varrho'_2} = -\frac{1}{s'_2}.$$

---

§ 4.

Die höheren sphärischen Evoluten.

Die Ergebnisse für die zweite sphärische Evolute gestatten sofort einige Schlüsse auf die dritte sphärische Evolute.

Ihre Gleichungen lauten, wenn wir die Koordinaten mit x_3, y_3, z_3 bezeichnen:

$$(1) \qquad \begin{aligned} x_3 &= (\alpha \cos H + \lambda \sin H) \cos \sigma_2 - l \sin \sigma_2, \\ y_3 &= (\beta \cos H + \mu \sin H) \cos \sigma_2 - m \sin \sigma_2, \\ z_3 &= (\gamma \cos H + \nu \sin H) \cos \sigma_2 - \nu \sin \sigma_2. \end{aligned}$$

Durch Vergleich mit den Formeln für die Richtungskosinus der Binormalen des Hauptnormalenbildes ergibt sich der Satz:

Die dritte sphärische Evolute der Grundkurve ist die erste sphärische Evolute des Hauptnormalenbildes.

Dieses Resultat kann auch aus der Anschauung gefolgert werden, wenn man bedenkt, daß die zweite sphärische Evolute und das Hauptnormalenbild parallele Kurven sind und somit parallele Binormalen besitzen müssen.

Die Richtungskosinus der Tangenten sind:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \alpha_3 &= -\{\,\mathfrak{l}\cos\sigma_2 + (\alpha\cos H + \lambda\sin H)\sin\sigma_2\},\\ \beta_3 &= -\{\mathfrak{m}\cos\sigma_2 + (\beta\cos H + \mu\sin H)\sin\sigma_2\},\\ \gamma_3 &= -\{\,\mathfrak{n}\cos\sigma_2 + (\gamma\cos H + \nu\sin H)\sin\sigma_2\}. \end{aligned}$$

Die durch fortgesetzte Evolutenbildung hervorgehenden Kurven heißen die höheren sphärischen Evoluten der Kurve (M). Setzt man das Verfahren bis zum n^{ten} Schritt fort, so erhalten wir eine Kurve, die wir als n^{te} sphärische Evolute bezeichnen wollen. Es kommt dann darauf an, ihre Bestimmungsgrößen durch die der $(n-1)^{ten}$ sphärischen Evolute auszudrücken.

Das Bogenelement der n^{ten} sphärischen Evolute ergibt sich sofort zu:

$$(3)\qquad ds_n = d\sigma_{n-1}.$$

Mit den bekannten Beziehungen für den Kontingenz- und Schmiegungswinkel erhalten wir ferner:

$$(4)\qquad d\tau_n = dk_{n-1},$$

$$(5)\qquad d\sigma_n = dH_{n-1}.$$

Diese drei Beziehungen gestatten die nächst höhere sphärische Evolute aus den Bestimmungsgrößen der vorhergehenden zu ermitteln. Sie können daher als Rekursionsformeln der n^{ten} sphärischen Evolute angesehen werden.

Mit Hilfe der drei Beziehungen finden wir:

$$(6)\qquad \varrho_n = \frac{d\sigma_{n-1}}{dk_{n-1}},$$

$$(7)\qquad r_n = \frac{d\sigma_{n-1}}{dH_{n-1}},$$

und schließlich noch:

$$(8)\qquad \operatorname{tg} H_n = -\frac{dk_{n-1}}{dH_{n-1}}.$$

§ 5.

Die sphärische Evolvente.

Bei der Betrachtung der sphärischen Evolute hatten wir gefunden, daß die Kurve (M) Orthogonaltrajektorie der Kurve (C′) ist. Infolgedessen besteht auf der Kugel, als Analogon eines entsprechenden in der Ebene, der Satz:

Jede sphärische Kurve ist eine sphärische Evolute des Ortes ihrer sphärischen Krümmungspunkte.

Ferner gilt der Satz:

Zwei sphärische Kurven sind dann und nur dann sphärische Evolventen derselben sphärischen Kurven, wenn sie Parallelkurven sind.

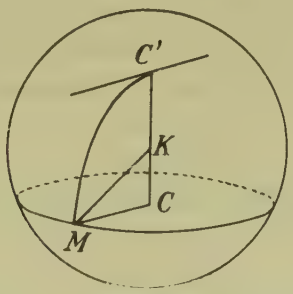

Fig. 6.

Es sei M ein Punkt der Ausgangskurve. Der zugehörige Krümmungsmittelpunkt C und der sphärische Krümmungsmittelpunkt C′ liegen mit dem Kugelmittelpunkt K auf demselben Kugelradius. Die Tangente in C′ an die Kurve (C′) ist offenbar parallel zu MC als Lot zu CK in derselben Ebene MCK. Fassen wir jetzt (C′) als Ausgangskurve auf, so ist (M) die zugehörige sphärische Evolvente, und wir erkennen den Satz:

Die Hauptnormale der sphärischen Evolvente ist der Tangente der Ausgangskurve parallel,

oder auch:

Das Hauptnormalenbild der sphärischen Evolvente ist das Tangentenbild der Ausgangskurve.

Wir haben also, wenn wir den Bestimmungsgrößen der sphärischen Evolvente den Index 4 erteilen:

$$(1) \qquad l_4 = \alpha, \qquad m_4 = \beta, \qquad n_4 = \gamma.$$

Infolge dieses Sachverhaltes ergibt sich auch:

$$(2) \qquad \lambda_4 = x, \qquad \mu_4 = y, \qquad \nu_4 = z.$$

Diesen Gleichungen können wir auch die Form geben:

$$(3) \qquad \begin{aligned} \lambda_4 &= \lambda \cos\sigma - l \sin\sigma, \\ \mu_4 &= \mu \cos\sigma - m \sin\sigma, \\ \nu_4 &= \nu \cos\sigma - n \sin\sigma. \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (2) finden wir sofort:

$$(4) \qquad d\sigma_4 = \varepsilon\, ds,$$

und da $\varrho_4 = \sin\sigma_4$ sein muß, folgt hiermit:

$$(5) \qquad \varrho_4 = \sin s$$

und der Satz:

Der sphärische Krümmungsradius der sphärischen Evolvente ist gleich dem Bogen der Ausgangskurve.

Der Abstand des Kugelmittelpunktes vom Krümmungsmittelpunkt der sphärischen Evolvente ist:

$$(6) \qquad h_4 = \cos s,$$

und der Neigungswinkel des Kugelradius gegen die Hauptnormale ist bestimmt durch:

$$(7) \qquad \operatorname{tg}\omega_4 = \cot s.$$

Nach einem früheren Ergebnis müssen die Gleichungen der sphärischen Evolvente sich darstellen lassen in der Form:

$$x_4 = \lambda_4 \cos\sigma_4 - l_4 \sin\sigma_4,$$

sodaß wir mit den gefundenen Resultaten erhalten:

$$(8) \qquad \begin{aligned} x_4 &= x \cos s - \alpha \sin s, \\ y_4 &= y \cos s - \beta \sin s, \\ z_4 &= z \cos s - \gamma \sin s. \end{aligned}$$

Wir können dafür auch schreiben:

$$(9) \qquad \begin{aligned} x_4 &= (\lambda \cos\sigma - l \sin\sigma) \cos s - \alpha \sin s, \\ y_4 &= (\mu \cos\sigma - m \sin\sigma) \cos s - \beta \sin s, \\ z_4 &= (\nu \cos\sigma - n \sin\sigma) \cos s - \gamma \sin s. \end{aligned}$$

Die Bestimmung der sphärischen Evolvente erfordert also die Lösung einer Quadratur, durch die die Bogenlänge gegeben ist.

Die Differentiation der Gleichungen (8) ergibt:

$$dx_4 = -\left(x \sin s + \frac{1}{\varrho} \sin s\right) ds,$$

$$dx_4 = -\left(x + \frac{1}{\varrho}\right) \sin s \, ds.$$

Nun ist aber:

$$x + \frac{1}{\varrho} = \lambda \cos\sigma + l \frac{\cos^2\sigma}{\sin\sigma},$$

folglich wird:

$$x + \frac{1}{\varrho} = \cot\sigma \, (\lambda \sin\sigma + l \cos\sigma),$$

und damit:

$$dx_4 = -\sin s \cot\sigma \, ds \, (\lambda \sin\sigma + l \cos\sigma),$$

oder:

$$dx_4 = -\operatorname{tg} H \sin s \cos\sigma \, d\sigma \, (\lambda \sin\sigma + l \cos\sigma).$$

Hieraus bekommen wir für das Bogenelement:

$$ds_4 = \varepsilon \operatorname{tg} H \sin s \cos\sigma \, ds. \tag{10}$$

Dabei ist $\varepsilon = \pm 1$, je nachdem die Ausgangskurve positive oder negative Torsion besitzt.

Die Richtungskosinus der Tangenten werden also:

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= \varepsilon \, (l \cos\sigma + \lambda \sin\sigma), \\ \beta_4 &= \varepsilon \, (m \cos\sigma + \mu \sin\sigma), \\ \gamma_4 &= \varepsilon \, (n \cos\sigma + \nu \sin\sigma). \end{aligned} \tag{11}$$

Die Hüllkurve der Tangentialebenen an die Kugel längs der Ausgangskurve und die sphärische Evolvente sind also parallele Raumkurven.

Der Kontingenzwinkel wird:

$$d\tau_4 = \varepsilon \operatorname{tg} H \cos\sigma \, d\sigma \tag{12}$$

und der Winkel der ganzen Krümmung:

$$dk_4 = d\tau. \tag{13}$$

Deshalb erhalten wir für den Radius der ganzen Krümmung:

$$r_4 = \sin s \cot\sigma \frac{d\sigma}{d\tau},$$

d. h.

$$r_4 = \sin s \cos\sigma. \tag{14}$$

Der Torsionsradius wird:

$$r_4 = \varepsilon \frac{ds_4}{ds}. \tag{15}$$

Mithin haben wir den Satz:

Der Torsionsradius der sphärischen Evolvente ist absolut gleich dem Verhältnis ihres Bogenelementes zu dem der Ausgangskurve.

Er wird:

$$r_4 = \sin s \cot \sigma. \tag{16}$$

a) Das Tangentenbild der sphärischen Evolvente.

Wir wollen die Koordinaten dieses Tangentenbildes mit $\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1$ bezeichnen. Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \varepsilon (l \cos \sigma + \lambda \sin \sigma), \\ \bar{y}_1 &= \varepsilon (m \cos \sigma + \mu \sin \sigma), \\ \bar{z}_1 &= \varepsilon (n \cos \sigma + \nu \sin \sigma), \end{aligned} \tag{17}$$

und das Bogenelement wird:

$$\overline{ds_1} = \varepsilon \operatorname{tg} H \cos \sigma \, d\sigma. \tag{18}$$

Für die Richtungskosinus der Tangenten finden wir:

$$\bar{\alpha}_1 = \alpha, \quad \bar{\beta}_1 = \beta, \quad \bar{\gamma}_1 = \gamma. \tag{19}$$

Das Tangentenbild der sphärischen Evolvente und die Ausgangskurve sind also parallele Raumkurven.

Das folgt überdies auch daraus, daß das Tangentenbild und die sphärische Evolute parallele Raumkurven sind, und daß die sphärische Evolute der sphärischen Evolvente mit der Ausgangskurve identisch ist.

Für den Krümmungsradius ist die Beziehung zu fordern $\varrho_1 = \sin H_4$, sodaß wir erhalten:

$$\bar{\varrho}_1 = \cos \sigma. \tag{20}$$

Der Krümmungsradius des Tangentenbildes der sphärischen Evolvente ist also gleich dem Abstand des Krümmungsmittelpunktes der Ausgangskurve vom Kugelmittelpunkt.

Der Torsionsradius wird:

$$\bar{r}_1 = \operatorname{tg} H \cos \sigma. \tag{21}$$

b) Die Krümmungsmittelpunktskurve (C_2) der sphärischen Evolvente.

Die Koordinaten der Kurve seien $\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2$. Dann ist:

$$\bar{x}_2 = x \cos s, \quad \bar{y}_2 = y \cos s, \quad \bar{z}_2 = z \cos s, \tag{22}$$

oder auch:

$$
\begin{aligned}
\bar{x}_2 &= (\lambda \cos\sigma - l \sin\sigma)\cos s,\\
\bar{y}_2 &= (\mu \cos\sigma - m \sin\sigma)\cos s,\\
\bar{z}_2 &= (\nu \cos\sigma - n \sin\sigma)\cos s.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Das Bogenelement wird:

$$
ds_2 = ds, \tag{24}
$$

d. h.:

Die Krümmungsmittelpunktskurve der sphärischen Evolvente und die Ausgangskurve besitzen gleiches Bogenelement.

Die Richtungskosinus der Tangenten sind:

$$
\begin{aligned}
\bar{\alpha}_2 &= \alpha \cos s - (\lambda \cos\sigma - l \sin\sigma)\sin s,\\
\bar{\beta}_2 &= \beta \cos s - (\mu \cos\sigma - m \sin\sigma)\sin s,\\
\bar{\gamma}_2 &= \gamma \cos s - (\nu \cos\sigma - n \sin\sigma)\sin s.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Für den Kontingenzwinkel erhalten wir:

$$
d\tau_2 = 4\, ds^2 + \cos^2 s \cos^2\sigma\, d\tau^2, \tag{26}
$$

und für den Krümmungsradius:

$$
\bar{\varrho}_2 = \frac{1}{\sqrt{4 + \cos^2 s \cot^2\sigma}}. \tag{27}
$$

Die Richtungskosinus der Haupt- und Binormalen nehmen die Form an:

$$
\begin{aligned}
\bar{l}_2 &= (x \cos s + \alpha \sin s)\cos\vartheta - (l \cos\sigma + \lambda \sin\sigma)\sin\vartheta,\\
\bar{m}_2 &= (y \cos s + \beta \sin s)\cos\vartheta - (m \cos\sigma + \mu \sin\sigma)\sin\vartheta,\\
\bar{n}_2 &= (z \cos s + \gamma \sin s)\cos\vartheta - (n \cos\sigma + \nu \sin\sigma)\sin\vartheta,
\end{aligned}
\tag{28}
$$

und:

$$
\begin{aligned}
\bar{\lambda}_2 &= (l \cos\sigma + \lambda \sin\sigma)\cos\vartheta + (x \cos s + \alpha \sin s)\sin\vartheta,\\
\bar{\mu}_2 &= (m \cos\sigma + \mu \sin\sigma)\cos\vartheta + (y \cos s + \beta \sin s)\sin\vartheta,\\
\bar{\nu}_2 &= (n \cos\sigma + \nu \sin\sigma)\cos\vartheta + (z \cos s + \gamma \sin s)\sin\vartheta.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Der eingeführte Hilfswinkel ist bestimmt durch:

$$
\sin\vartheta = \frac{\cos s \cot\sigma}{\sqrt{4 + \cos^2 s \cot^2\sigma}},
$$

$$
\cos\vartheta = \frac{-2}{\sqrt{4 + \cos^2 s \cot^2\sigma}}.
$$

Es ist derjenige Winkel, durch den man die Schmiegungsebene von (C_3) um ihre Tangente im positiven Sinne drehen muß, damit sie mit der Normalebene der sphärischen Evolvente zusammenfällt.

Für den Schmiegungswinkel ergibt sich:

$$(30) \qquad d\bar{\sigma}_2 = d\sigma - d\vartheta,$$

und für den Torsionsradius:

$$(31) \qquad \bar{r}_2 = \frac{ds}{d\sigma - d\vartheta}.$$

c) Die Hüllkurve (H_4) der Tangentialebenen an die Kugel längs der sphärischen Evolvente.

Die Kurve habe die Koordinaten x_3, y_3, z_3. Ihre Gleichungen lauten:

$$(32) \qquad \bar{x}_3 = \frac{x}{\cos s}, \quad \bar{y}_3 = \frac{y}{\cos s}, \quad \bar{z}_3 = \frac{z}{\cos s},$$

oder auch:

$$(33) \qquad \begin{aligned} x_3 &= \frac{\lambda \cos\sigma - l \sin\sigma}{\cos s}, \\ y_3 &= \frac{\mu \cos\sigma - m \sin\sigma}{\cos s}, \\ z_3 &= \frac{\nu \cos\sigma - n \sin\sigma}{\cos s}. \end{aligned}$$

Das Bogenelement wird:

$$(34) \qquad d\bar{s}_3 = \frac{ds}{\cos^2 s},$$

und infolgedessen:

$$(35) \qquad s_3 = \operatorname{tg} s.$$

Die Richtungskosinus der Tangenten werden:

$$(36) \qquad \begin{aligned} \alpha_3 &= \alpha \cos s + (\lambda \cos\sigma - l \sin\sigma) \sin s, \\ \beta_3 &= \beta \cos s + (\mu \cos\sigma - m \sin\sigma) \sin s, \\ \gamma_3 &= \gamma \cos s + (\nu \cos\sigma - n \sin\sigma) \sin s. \end{aligned}$$

Für den Kontingenzwinkel ergibt sich:

$$(37) \qquad d\tau_3 = \cot\sigma \cos s \, ds,$$

und für den Krümmungsradius:

$$(38) \qquad \varrho_3 = \frac{1}{\cot\sigma \cos^3 s}.$$

Die Richtungskosinus der Hauptnormalen sind:

$$(39) \qquad \begin{aligned} \bar{l}_3 &= l \cos\sigma + \lambda \sin\sigma, \\ \bar{m}_3 &= m \cos\sigma + \mu \sin\sigma, \\ n_3 &= n \cos\sigma + \nu \sin\sigma. \end{aligned}$$

Die Hauptnormalen der Hüllkurve der Tangentialebenen an die Kugel längs der sphärischen Evolvente sind also parallel den Tangenten der Hüllkurve der Tangentialebenen an die Kugel längs der Ausgangskurve.

Der Winkel der ganzen Krümmung wird:

$$(40) \qquad d\bar{k}_3 = \operatorname{tg} H \cos\sigma \, d\sigma,$$

und der Radius der ganzen Krümmung:

$$(41) \qquad \bar{r}_3 = \frac{ds}{\cos^2 s \operatorname{tg} H \cos\sigma \, d\sigma},$$

d. h.:

$$(42) \qquad \bar{r}_3 = \frac{1}{\cos^2 s \cot\sigma}.$$

Die Richtungskosinus der Binormalen werden dargestellt durch:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_3 &= \alpha \sin s - (\lambda \cos\sigma - 1 \sin\sigma) \cos s, \\ (43) \qquad \bar{\mu}_3 &= \beta \sin s - (\mu \cos\sigma - m \sin\sigma) \cos s, \\ \bar{\nu}_3 &= \gamma \sin s - (\nu \cos\sigma - n \sin\sigma) \cos s. \end{aligned}$$

Für den Schmiegungswinkel ergibt sich:

$$(44) \qquad d\bar{\sigma}_3 = \sin s \cot\sigma \, ds,$$

sodaß wir für den Torsionsradius erhalten:

$$(45) \qquad \bar{r}_3 = \frac{1}{\sin s \cos^2 s \cot\sigma}.$$

Durch Bildung des Quotienten $\frac{\bar{r}_3}{\varrho_3}$ bekommen wir wieder die natürliche Gleichung der Kegelgeodätischen.

Die Gleichungen der Kurven, in denen die Haupt- und Binormalen der sphärischen Evolvente die Kugel durchstoßen, lauten:

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_3 &= \pm [(\lambda \cos\sigma - 1 \sin\sigma) \cos s + \alpha \sin s], \\ \bar{\eta}_3 &= \pm [(\mu \cos\sigma - m \sin\sigma) \cos s + \beta \sin s], \\ \bar{\zeta}_3 &= \pm [(\nu \cos\sigma - n \sin\sigma) \cos s + \gamma \sin s]. \end{aligned}$$

d) Anwendung auf die sphärische Schraubenlinie.

Wir erhalten:

$$\operatorname{tg} H_4 = -\cot\sigma.$$

Hiermit können wir die bekannte und schon gelöste Aufgabe,[1]) die sphärische Evolvente des Kreises zu ermitteln, einfach in ihrer Richtigkeit bestätigen.

[1]) Diss. von Frieda Nugel, Die Schraubenlinien, Halle 1912.

Wir haben für den Kreis anzusetzen:

$$d\sigma = 0, \quad \text{d. h. } \sigma = \text{konst.}$$

Infolgedessen wird:

$$\operatorname{tg} H_4 = \text{konst.}$$

Folglich ist die sphärische Evolvente des Kreises eine sphärische Schraubenlinie.[1])

Umgekehrt gehen wir so vor: Der Krümmungsradius der sphärischen Evolute war bestimmt durch:

$$\varrho''_s = -\cos H.$$

Da für sphärische Schraubenlinien H = konst. ist, folgt:

$$\sin\sigma''_s = \text{konst.},$$

d. h.

$$\cos\sigma''_s \, d\sigma''_s = 0,$$

$$d\sigma''_s = 0.$$

Die sphärische Evolute der sphärischen Schraubenlinie muß also eine ebene Kurve der Kugel und somit ein Kreis sein. Die zweite sphärische Evolute der sphärischen Schraubenlinie reduziert sich auf einen Punkt, den sphärischen Mittelpunkt jenes Kreises.

Ebenso ergibt sich, daß das Tangentenbild der sphärischen Schraubenlinie ein Kreis ist.

Der Krümmungsradius ϱ_h des Hauptnormalenbildes ist bestimmt worden zu:

$$\varrho_h = \frac{dk}{\sqrt{dk^2 + dH^2}}.$$

Da bei sphärischen Schraubenlinien $dH = 0$ ist, ist ihr Hauptnormalenbild ein größter Kugelkreis.

Dieses Ergebnis ist ein besonderer Fall der sphärischen Abbildung einer gewöhnlichen Schraubenlinie.[2])

§ 6.

Die sphärische Evolvente des Tangentenbildes.

Die Gleichungen lauten mit x′, y′, z′ als Koordinaten:

$$(1) \qquad \begin{aligned} x' &= \alpha\cos\tau - l\sin\tau, \\ y' &= \beta\cos\tau - m\sin\tau, \\ z' &= \gamma\cos\tau - n\sin\tau. \end{aligned}$$

[1]) Schell-Salkowski S. 113.

[2]) Schell-Salkowski S. 25.

Die Bestimmung der sphärischen Evolvente des Tangentenbildes erfordert also die Quadratur, durch die der Kontingenzwinkel gegeben ist.

Die Differentiation der Gleichungen (1) ergibt:

$$dx' = \left(\frac{d\alpha}{d\tau}\cos\tau - \alpha\sin\tau - \frac{dl}{d\tau}\sin\tau - l\cos\tau\right)d\tau.$$

Hieraus folgt nach einiger Umformung:

$$dx' = \lambda\sin\tau\, d\sigma,$$

sodaß wir für das Bogenelement erhalten:

(2) $$ds' = \varepsilon\sin\tau\, d\sigma.$$

Dabei ist $\varepsilon = \pm 1$, je nachdem die Torsion von (M) positiv oder negativ ist.

Somit ergeben sich für die Richtungskosinus der Tangenten die Ausdrücke:

(3) $$\alpha' = \varepsilon\lambda, \quad \beta' = \varepsilon\mu, \quad \gamma' = \varepsilon\nu.$$

Das Tangentenbild der sphärischen Evolvente des Tangentenbildes und die sphärische Evolute der Ausgangskurve fallen zusammen oder liegen zu einander symmetrisch, je nachdem die Torsion von (M) positiv oder negativ ist.

Wir erhalten ferner:

(4) $$d\tau' = \varepsilon\, d\sigma,$$

und daher:

(5) $$\varrho' = \sin\tau.$$

Damit gewinnen wir den Satz:

Der sphärische Krümmungsradius der sphärischen Evolvente des Tangentenbildes ist gleich der Summe der Kontingenzwinkel der Ausgangskurve.

Da $l' = \frac{d\alpha'}{d\tau'}$ ist, bekommen wir:

(6) $$l' = l, \quad m' = m, \quad n' = n.$$

Das Hauptnormalenbild von (M) ist also identisch mit dem Hauptnormalenbild der sphärischen Evolvente des Tangentenbildes.

Wir erhalten:

(7) $$dk' = dk,$$

und

(8) $$\mathfrak{r}' = \sin\tau\cos H.$$

Der Schmiegungswinkel wird:

(9) $$d\sigma' = \varepsilon\, d\tau,$$

und der Torsionsradius:

(10) $$r' = \cot H \sin\tau.$$

§ 7.

Die höheren sphärischen Evolventen.

Gemäß den Betrachtungen über die erste sphärische Evolvente erhalten wir für die zweite die Beziehungen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} l'' &= \varepsilon(l\cos\sigma + \lambda\sin\sigma),\\ m'' &= \varepsilon(m\cos\sigma + \mu\sin\sigma),\\ n'' &= \varepsilon(n\cos\sigma + \nu\sin\sigma), \end{aligned}$$

und hieraus:

$$(2)\qquad dk'' = \varepsilon\,\mathrm{tg}\,H\cos\sigma\,d\sigma.$$

Die Richtungskosinus der Binormalen werden:

$$(3)\qquad \begin{aligned} \lambda'' &= x\cos s - \alpha\sin s,\\ \mu'' &= y\cos s - \beta\sin s,\\ \nu'' &= z\cos s - \gamma\sin s, \end{aligned}$$

und der Schmiegungswinkel wird:

$$(4)\qquad d\sigma'' = \varepsilon\,\mathrm{tg}\,H\sin s\cos\sigma\,d\sigma,$$

sodaß wir finden:

$$(5)\qquad \frac{d\sigma''}{dk''} = \sin s.$$

Durch fortgesetzte Evolventenbildung ergeben sich die höheren sphärischen Evolventen der Grundkurve.

Das Bogenelement der p^{ten} sphärischen Evolvente wird:

$$(6)\qquad ds_p = \cot\sigma_{p-1}\sin s_{p-1}\,ds_{p-1},$$

und der Kontingenzwinkel:

$$(7)\qquad d\tau_p = \cot\sigma_{p-1}\,ds_{p-1}.$$

Infolgedessen ergibt sich für den Krümmungsradius:

$$(8)\qquad \varrho_p = \sin s_{p-1}.$$

Der sphärische Krümmungsradius der p^{ten} sphärischen Evolvente ist gleich der Bogenlänge der $(p-1)^{ten}$ Evolvente.

Der Schmiegungswinkel wird:

$$(9)\qquad d\sigma_p = ds_{p-1},$$

und demnach der Torsionsradius:

$$(10)\qquad r_p = \cot\sigma_{p-1}\sin s_{p-1}.$$

Folglich besteht die Beziehung:

$$(11)\qquad \frac{r_p}{\varrho_p} = \cot\sigma_{p-1}.$$

Ferner wird:

$$(12)\qquad dk_p = d\tau_{p-1},$$

und daher:

$$\mathfrak{r}_p = \cos\sigma_{p-1} \sin s_{p-1}. \tag{13}$$

Mithin erhalten wir:

$$\frac{\mathfrak{r}_p}{\varrho_p} = \cos\sigma_{p-1}, \tag{14}$$

und

$$\frac{\mathfrak{r}_p}{\varrho_p} = \varrho_{p-1}. \tag{15}$$

Mit Hilfe dieser verschiedenen Beziehungen können wir die Elemente der nächst höheren sphärischen Evolvente aus denen der vorhergehenden berechnen, sodaß wir jene Gleichungen als Rekursionsformeln für die p^{te} sphärische Evolvente auffassen können.

---

§ 8.

Die sphärische Evolutoide.

Zieht man durch die auf einander folgenden Punkte M, M_1, M_2 .. einer sphärischen Kurve größte Kreise, die mit den sphärischen Tangenten dieser Punkte stets den konstanten Winkel ε_0 bilden, so bestimmen die Schnittpunkte je zwei dieser benachbarten größten Kreise auf der Kugel die sphärische Evolutoide der Ausgangskurve.

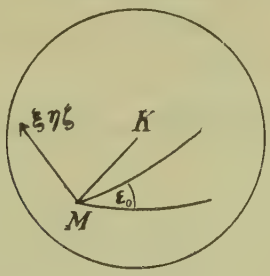

Fig. 7.

Zur Darstellung der sphärischen Evolutoiden brauchen wir somit zunächst die Gleichungen zweier benachbarten Ebenen, in denen zwei jener benachbarten Kreise liegen. Zur Bestimmung der Gleichung einer Ebene, die durch einen Punkt geht, benötigen wir aber die Richtungskosinus ihres Lotes.

Die Ebene bildet mit der sphärischen Tangente im Punkte M, der die Koordinaten x, y, z haben möge, den Winkel ε_0. Folglich schließt ihr Lot mit der Tangente den Winkel $\frac{\pi}{2} + \varepsilon_0$ ein. Das Lot steht außerdem in M senkrecht auf dem Radius nach diesem Punkte, denn der Radius liegt in der Ebene. Nennt man also die Richtungskosinus des Lotes ξ, η, ζ, so erhält man zu ihrer Bestimmung die Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\Sigma \xi x = 0, \\ (1) \qquad &\Sigma \xi \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_0\right) = -\sin\varepsilon_0, \\ &\Sigma \xi^2 = 1. \end{aligned}$$

Die Lösung der Gleichungen ergibt:

$$\begin{aligned} \xi &= -\alpha \sin\varepsilon_0 + (\lambda \sin\sigma + 1\cos\sigma)\cos\varepsilon_0, \\ (2) \qquad \eta &= -\beta \sin\varepsilon_0 + (\mu \sin\sigma + m\cos\sigma)\cos\varepsilon_0, \\ \nu &= -\gamma \sin\varepsilon_0 + (\nu \sin\sigma + n\cos\sigma)\cos\varepsilon_0. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir nun die Koordinaten der betrachteten sphärischen Evolutoide mit X, Y, Z, so haben wir die Gleichung der ersten Ebene in der Form:

$$\Sigma (X - x)\xi = 0,$$

und hieraus folgt:

$$(3) \qquad \Sigma X \xi = 0.$$

Die Gleichung der benachbarten Ebene ist danach:

$$(4) \qquad \Sigma X \, d\xi = 0.$$

Wir finden aber:

$$d\xi = -\sin\varepsilon_0 \frac{d\alpha}{ds} ds + [(\lambda' \sin\sigma + l'\cos\sigma) ds + (\lambda \cos\sigma - l\sin\sigma) d\sigma]\cos\varepsilon_0.$$

Hieraus folgt:

$$d\xi = ds\left\{-\frac{1}{\varrho}\sin\varepsilon_0 + \left[\frac{l}{r}\sin\sigma - \left(\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\lambda}{r}\right)\cos\sigma + (\lambda\cos\sigma - l\sin\sigma)\frac{1}{r}\right]\cos\varepsilon_0\right.$$

Nach Vereinfachung dieses Ausdruckes wird:

$$d\xi = -d\tau\,(l\sin\varepsilon_0 + \alpha\cos\sigma\cos\varepsilon_0).$$

Es ist also:

$$\Sigma X \, d\xi = -d\tau\,\Sigma X\,(l\sin\varepsilon_0 + \alpha\cos\sigma\cos\varepsilon_0) = 0.$$

Folglich bestimmt sich die sphärische Evolutoide aus:

$$(5)\quad \begin{aligned} &\Sigma X\,[(\lambda \sin\sigma + l\cos\sigma)\cos\varepsilon_0 - \alpha\sin\varepsilon_0] = 0,\\ &\Sigma X\,[l\sin\varepsilon_0 + \alpha\cos\sigma\cos\varepsilon_0] = 0,\\ &\Sigma X^2 = 1. \end{aligned}$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt:

$$\begin{aligned} X = \varkappa\,[&l\sin\sigma\cos\sigma\cos^2\varepsilon_0 - \alpha\sin\sigma\sin\varepsilon_0\cos\varepsilon_0 - \\ &- \lambda\,(\sin^2\varepsilon_0 + \cos^2\sigma\cos^2\varepsilon_0)]. \end{aligned}$$

Den Proportionalitätsfaktor $\varkappa$ ermitteln wir mit Hilfe der dritten Gleichung (5).

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varkappa^2} = {}&\sin^2\sigma\cos^2\sigma\cos^4\varepsilon_0 + \sin^2\sigma\sin^2\varepsilon_0\cos^2\varepsilon_0 + \sin^4\varepsilon_0 + \\ &+ \cos^4\sigma\cos^4\varepsilon_0 + 2\cos^2\sigma\sin^2\varepsilon_0\cos^2\varepsilon_0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\varkappa = \frac{1}{\sqrt{\sin^2\varepsilon_0 + \cos^2\varepsilon_0\cos^2\sigma}}.$$

Somit lauten die Gleichungen der betrachteten sphärischen Evolutoide:

$$(6)\quad \begin{aligned} X &= \frac{(l\cos\sigma\cos\varepsilon_0 - \alpha\sin\varepsilon_0)\sin\sigma\cos\varepsilon_0 - \lambda(\sin^2\varepsilon_0 + \cos^2\sigma\cos^2\varepsilon_0)}{\sqrt{\sin^2\varepsilon_0 + \cos^2\varepsilon_0\cos^2\sigma}},\\ Y &= \frac{(m\cos\sigma\cos\varepsilon_0 - \beta\sin\varepsilon_0)\sin\sigma\cos\varepsilon_0 - \mu(\sin^2\varepsilon_0 + \cos^2\sigma\cos^2\varepsilon_0)}{\sqrt{\sin^2\varepsilon_0 + \cos^2\varepsilon_0\cos^2\sigma}},\\ Z &= \frac{(n\cos\sigma\cos\varepsilon_0 - \gamma\sin\varepsilon_0)\sin\sigma\cos\varepsilon_0 - \nu(\sin^2\varepsilon_0 + \cos^2\sigma\cos^2\varepsilon_0)}{\sqrt{\sin^2\varepsilon_0 + \cos^2\varepsilon_0\cos^2\sigma}}. \end{aligned}$$

Für den Fall $\varepsilon_0 = \frac{\pi}{2}$ geht die sphärische Evolutoide in die sphärische Evolute über.

Die Gleichungen (6) gestatten eine Folgerung zu ziehen und die Frage zu beantworten: Für welche Kurven artet eine Evolutoide in einen Punkt aus? Man kann den Punkt X Y Z durch die Koordinaten (1, 0, 0) gegeben denken. Dann wird:

$$\Sigma\alpha X = \alpha = -\frac{\sin\varepsilon_0\cos\varepsilon_0\sin\sigma}{\sqrt{\sin^2\varepsilon_0 + \cos^2\varepsilon_0\cos^2\sigma}};$$

$$\Sigma l X = l = \frac{\cos\sigma\sin\sigma\cos^2\varepsilon_0}{\sqrt{\sin^2\varepsilon_0 + \cos^2\varepsilon_0\cos^2\sigma}}.$$

Mit Hilfe dieser beiden Beziehungen können wir zwei Ausdrücke für $\frac{d\alpha}{d\sigma}$ ableiten, wenn wir bedenken, daß $\frac{d\alpha}{d\sigma} = 1 - \frac{r}{\varrho}$ ist. Durch Vergleich der so erhaltenen Werte, die nur die beiden Krümmungen enthalten, ergibt sich die natürliche Gleichung der gesuchten Kurve. Wir erhalten nach einigen Umformungen:

$$r(\varrho^2 \cos^2 \varepsilon_0 - 1) = \operatorname{tg} \varepsilon_0. \text{ [1]}$$

Diese Beziehung besteht für die sphärische Loxodrome, d. h. eine sphärische Evolutoide der sphärischen Loxodrome reduziert sich auf einen Punkt.

Die Bestimmungsgleichungen:

$$\Sigma X[(\lambda \sin\sigma + 1\cos\sigma)\cos\varepsilon_0 - \alpha \sin\varepsilon_0] = 0,$$
$$\Sigma X[1\sin\varepsilon_0 + \alpha\cos\sigma\cos\varepsilon_0] = 0,$$

haben eine einfache geometrische Bedeutung. Jede der Gleichungen stellt eine Ebene dar. Die zweite der Ebenen geht durch den sphärischen Krümmungsmittelpunkt, denn sie ist erfüllt für

$$X = \lambda, \qquad Y = \mu, \qquad Z = \nu.$$

Ferner bilden die beiden Ebenen einen rechten Winkel miteinander, denn es ist:

$$\Sigma a_1 a_2 = 0. \text{ [2]}$$

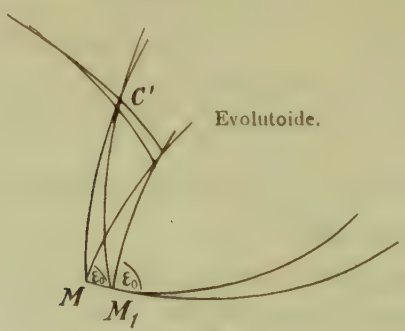

Fig. 8.

---

[1]) Vergl. § 9.

[2]) Es ist dabei:

$$a_1 = (\lambda \sin\sigma + 1\cos\sigma)\cos\varepsilon_0 - \alpha\sin\varepsilon_0,$$
$$a_2 = 1\sin\varepsilon_0 + \alpha\cos\sigma\cos\varepsilon_0.$$

b_1, b_2 und c_1, c_2, die in $\Sigma a_1 a_2 = 0$ enthalten sind, ergeben sich aus a_1 und a_2 durch zyklische Vertauschung.

Diese Ergebnisse besagen:

Die sphärischen Normalen der sphärischen Evolutoide gehen durch den sphärischen Krümmungsmittelpunkt und umhüllen eine sphärische Evolutoide der sphärischen Evolute (siehe Fig. 8).

Dieses Resultat stellt das sphärische Analogon des Réaumurschen Satzes der Ebene dar.[1])

§ 9.

Die sphärische Loxodrome.

Die bisher gefundenen Ergebnisse sollen auf die sphärische Loxodrome angewendet werden.

Die Behandlung der Aufgabe, alle Kurven zu bestimmen, die einen Ebenenbüschel unter einem konstanten Winkel ε schneiden, führt auf eine Monge'sche Differentialgleichung von der Form:

$$(1) \qquad (x\,dy - y\,dx)^2 - \sin^2\varepsilon\,(x^2+y^2)\,(dx^2+dy^2+dz^2) = 0.$$

Wir kommen mit ihrer Hilfe auf die sphärische Loxodrome, wenn wir setzen:

$$(2) \qquad \begin{aligned} x &= \sin\varphi\cos\psi, \\ y &= \sin\varphi\sin\psi, \\ z &= \cos\varphi. \end{aligned}$$

Es ergibt sich:

$$(3) \qquad d\psi = \pm \operatorname{tg}\varepsilon\,\frac{d\varphi}{\sin\varphi}.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert:

$$(4) \qquad \psi = \pm \operatorname{tg}\varepsilon \ln\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right).$$

Hiermit haben wir die Gleichung der sphärischen Loxodrome in sphärischen Koordinaten. Wir erkennen, daß sie die Pole zu asymptotischen Punkten hat, denen sie sich in unendlich vielen Windungen annähert.

Die Gleichung (4) legt nahe, die Hyperbelfunktionen einzuführen, denn es wird:

$$(5) \qquad \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = e^{k\psi}.$$

Dabei ist gesetzt worden:

$$k = \pm \operatorname{cotg}\varepsilon.$$

---

[1]) Schell-Salkowski S. 163.

Aus Gleichung (5) folgt:

$$\sin\varphi = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{\mathfrak{Cof}\,k\psi}.$$

Die Projektion des Kugelradius in die Äquatorebene ist bestimmt durch:

$$r' = \sin\varphi,$$

und das ergibt als Projektion der Loxodrome auf die Äquatorebene die Kurve:

$$r' = \frac{1}{\mathfrak{Cof}\,k\psi}.$$

Es ist eine Poinsotsche Spirale.[1])

Die rechtwinkligen Koordinaten der sphärischen Loxodrome nehmen die Form an:

$$\begin{aligned} x &= \cos\psi\,\mathfrak{Sec}\,k\psi, \\ y &= \sin\psi\,\mathfrak{Sec}\,k\psi, \\ z &= \mathfrak{Tg}\,k\psi. \end{aligned} \tag{6}$$

Die Differentiation dieser Gleichungen ergibt:

$$dx = -\left[\frac{k\cos\psi\,\mathfrak{Sin}\,k\psi}{\mathfrak{Cof}^2 k\psi} + \frac{\sin\psi}{\mathfrak{Cof}\,k\psi}\right]d\psi,$$

$$dy = -\left[\frac{k\sin\psi\,\mathfrak{Sin}\,k\psi}{\mathfrak{Cof}^2 k\psi} - \frac{\cos\psi}{\mathfrak{Cof}\,k\psi}\right]d\psi,$$

$$dz = \frac{k\,d\psi}{\mathfrak{Cof}^2 k\psi}.$$

Hiermit finden wir für das Bogenelement:

$$ds = \sqrt{1+k^2}\,\frac{d\psi}{\mathfrak{Cof}\,k\psi}. \tag{7}$$

Die Richtungskosinus der Tangenten werden:

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}[k\cos\psi\,\mathfrak{Tg}\,k\psi + \sin\psi], \\ \beta &= -\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}[k\sin\psi\,\mathfrak{Tg}\,k\psi + \cos\psi], \\ \gamma &= \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\,\mathfrak{Sec}\,k\psi. \end{aligned} \tag{8}$$

Mit Hilfe der Transformation:

$$\begin{aligned} \cos\varepsilon\,\mathfrak{Sin}\,k\psi &= \xi\cos\vartheta, \\ \sin\varepsilon\,\mathfrak{Cof}\,k\psi &= \xi\cos\vartheta, \end{aligned}$$

[1]) F. Gomes Teixeira: Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches. (Coimbra 1909.)

können diese Richtungskosinus auf die Form gebracht werden:

$$\alpha = -\xi \frac{\cos(\vartheta - \psi)}{\mathfrak{Cof}\, k\psi},$$

$$\beta = \xi \frac{\sin(\vartheta - \psi)}{\mathfrak{Cof}\, k\psi},$$

$$\gamma = \xi \frac{\cos\vartheta}{\mathfrak{Sin}\, k\psi\, \mathfrak{Cof}\, k\psi}.$$

Aus den Gleichungen (8) bekommen wir nach einiger Umformung:

$$d\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}[\cos\psi\,(1 + k^2\,\mathfrak{Sec}^2\, k\psi) - k\sin\psi\,\mathfrak{Tg}\, k\psi]\, d\psi,$$

$$d\beta = -\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}[\sin\psi\,(1 + k^2\,\mathfrak{Sec}^2\, k\psi) + k\cos\psi\,\mathfrak{Tg}\, k\psi]\, d\psi,$$

$$d\gamma = -\frac{k^2}{\sqrt{1+k^2}} \frac{\mathfrak{Sin}\, k\psi}{\mathfrak{Cof}^2\, k\psi}\, d\psi.$$

Hiermit finden wir in der bekannten Weise für den Kontingenzwinkel den Ausdruck:

$$(9) \qquad d\tau = \sqrt{k^2 + \mathfrak{Cof}^2\, k\psi}\, \frac{d\psi}{\mathfrak{Cof}\, k\psi},$$

und für den Krümmungsradius:

$$(10) \qquad \varrho = \sqrt{\frac{1+k^2}{k^2 + \mathfrak{Cof}^2\, k\psi}}.$$

Der Ausdruck für den Kontingenzwinkel gestattet noch ein bemerkenswertes Resultat zu erkennen.

Es ist:

$$(9a) \qquad d\tau^2 = (k^2 + \mathfrak{Cof}^2\, k\psi) \frac{d\psi^2}{\mathfrak{Cof}^2\, k\psi}.$$

Nach (3) aber ist:

$$d\psi^2 = \frac{1}{k^2}\mathfrak{Cof}^2\, k\psi\, d\varphi^2,$$

oder:

$$\mathfrak{Cof}^2\, k\psi = k^2 \frac{d\psi^2}{d\varphi^2}.$$

Diesen Wert setzen wir in (9a) ein und finden für die Loxodrome die Beziehung:

$$d\tau^2 = d\varphi^2 + d\psi^2.$$

Die Richtungskosinus der Hauptnormalen nehmen die Gestalt an:

$$l = -\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}[\cos\psi(1+k^2\,\mathfrak{Sec}^2 k\psi) - k\sin\psi\,\mathfrak{Tg}\,k\psi]\frac{\mathfrak{Cof}\,k\psi}{\sqrt{k^2+\mathfrak{Cof}^2 k\psi}},$$

$$(11)\quad m = -\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}[\sin\psi(1+k^2\,\mathfrak{Sec}^2 k\psi) + k\cos\psi\,\mathfrak{Tg}\,k\psi]\frac{\mathfrak{Cof}\,k\psi}{\sqrt{k^2+\mathfrak{Cof}^2 k\psi}},$$

$$n = -\frac{k^2}{\sqrt{1+k^2}}\frac{\mathfrak{Tg}\,k\psi}{\sqrt{k^2+\mathfrak{Cof}^2 k\psi}},$$

und die der Binormalen:

$$(12)\quad \lambda = \frac{k\sin\psi}{\sqrt{k^2+\mathfrak{Cof}^2 k\psi}},\qquad \mu = -\frac{k\cos\psi}{\sqrt{k^2+\mathfrak{Cof}^2 k\psi}},\qquad \nu = \frac{\mathfrak{Cof}\,k\psi}{\sqrt{k^2+\mathfrak{Cof}^2 k\psi}}.$$

Die Differentiation ergibt:

$$d\lambda = [k\cos\psi(k^2+\mathfrak{Cof}^2 k\psi) - k^2\sin\psi\,\mathfrak{Sin}\,k\psi\,\mathfrak{Cof}\,k\psi]\frac{d\psi}{\sqrt{(k^2+\mathfrak{Cof}^2 k\psi)^3}},$$

$$d\mu = [k\sin\psi(k^2+\mathfrak{Cof}^2 k\psi) + k^2\cos\psi\,\mathfrak{Sin}\,k\psi\,\mathfrak{Cof}\,k\psi]\frac{d\psi}{\sqrt{(k^2+\mathfrak{Cof}^2 k\psi)^3}},$$

$$d\nu = [k\,\mathfrak{Sin}\,k\psi(k^2+\mathfrak{Cof}^2 k\psi) - k\,\mathfrak{Sin}\,k\psi\,\mathfrak{Cof}\,k\psi]\frac{d\psi}{\sqrt{(k^2+\mathfrak{Cof}^2 k\psi)^3}}.$$

Infolgedessen finden wir für den Schmiegungswinkel:

$$(13)\quad d\sigma = k\sqrt{1+k^2}\,\frac{\mathfrak{Cof}\,k\psi}{\sqrt{k^2+\mathfrak{Cof}^2 k\psi}}\,d\psi,$$

und für den Torsionsradius:

$$(14)\quad r = \frac{k^2+\mathfrak{Cof}^2 k\psi}{k\,\mathfrak{Cof}^2 k\psi}.$$

Mithin besteht zwischen den Krümmungen die Beziehung:

$$r\varrho^2 = \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varepsilon}.$$

Der Winkel der ganzen Krümmung ergibt sich nach dem Lancretschen Satz und ist bestimmt durch:

$$(15)\quad dk = \frac{\sqrt{(k^2+\mathfrak{Cof}^2 k\psi)^3 + k^2(1+k^2)\,\mathfrak{Cof}^4 k\psi}\,d\psi}{\mathfrak{Cof}\,k\psi\,(k^2+\mathfrak{Cof}^2 k\psi)}.$$

Also wird der Radius der ganzen Krümmung:

$$(16)\quad r = \frac{\sqrt{1+k^2}\,(k^2+\mathfrak{Cof}^2 k\psi)}{\sqrt{(k^2+\mathfrak{Cof}^2 k)^3 + k^2(1+k^2)\,\mathfrak{Cof}^4 k\psi}}.$$

Der Ausdruck für das Bogenelement ist integrabel und bestimmt:

$$s = \frac{2}{k}\sqrt{1+k^2}\,\operatorname{arctg}(e^{k\psi}). \tag{17}$$

Infolgedessen wird:

$$e^{k\psi} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{k}{2\sqrt{1+k^2}}s\right),$$

d. h.

$$\sin\varphi = \sin\left(\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}s\right).$$

Mithin lauten die natürlichen Gleichungen der sphärischen Loxodrome:

$$\varrho = \sqrt{\frac{1+k^2}{\frac{1}{k}+k^2+\operatorname{cotg}^2\left(\frac{k}{\sqrt{1+k}}s\right)}},$$

$$r = \frac{1}{k}+k\sin^2\left(\frac{k}{\sqrt{1+k}}s\right), \tag{18}$$

oder auch:

$$r\varrho^2 = \frac{1}{k}\sqrt{1+k^2}\sin^2\left(\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}s\right). \tag{19}$$

Der Abstand des Kugelmittelpunkts vom Krümmungsmittelpunkt ist:

$$h = \frac{\mathfrak{Sin}\,k\psi}{\sqrt{k^2+\mathfrak{Cof}^2 k\psi}}, \tag{20}$$

und der Neigungswinkel des Kugelradius gegen die Hauptnormale:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\mathfrak{Sin}\,k\psi. \tag{21}$$

a) Das Tangentenbild der sphärischen Loxodrome.

Wir bezeichnen die Koordinaten des Tangentenbildes mit x_1, y_1, z_1 und erhalten als Gleichungen:

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}[\cos\psi\,\mathfrak{Tg}\,k\psi+\sin\psi],$$

$$y_1 = -\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}[\sin\psi\,\mathfrak{Tg}\,k\psi-\cos\psi], \tag{22}$$

$$z_1 = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\mathfrak{Sec}\,k\psi.$$

Das Bogenelement wird:

$$(23) \qquad ds_1 = \sqrt{k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi}\,\frac{d\psi}{\mathfrak{Cof}\, k\psi}$$

und der Kontingenzwinkel:

$$(24) \qquad d\tau_1 = \frac{\sqrt{(k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi)^3 + k^2(1+k^2)\,\mathfrak{Cof}^4 k\psi}\; d\psi}{\mathfrak{Cof}\, k\psi\,(k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi)}.$$

Infolgedessen erhalten wir für den Krümmungsradius den Ausdruck:

$$(25) \qquad \varrho_1 = \frac{\sqrt{(k^2 + \mathfrak{Cof}\, k\psi)^3}}{\sqrt{(k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi)^3 + k^2(1+k^2)\,\mathfrak{Cof}^4 k\psi}}.$$

Es gelten wegen $\varrho_1 = \sin\sigma_1$ die Beziehungen:

$$\sin\sigma_1 = \frac{\sqrt{(k^2 + \mathfrak{Cof}\, k\psi)^3}}{\sqrt{(k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi)^3 + k^2(1+k^2)\,\mathfrak{Cof}^4 k\psi}},$$

$$\cos\sigma_1 = \frac{k\sqrt{1+k^2}\,\mathfrak{Cof}^2 k\psi}{\sqrt{(k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi)^3 + k^2(1+k^2)\,\mathfrak{Cof}^4 k\psi}}.$$

Mithin erhalten wir für die Richtungskosinus der Hauptnormalen:

$$l_1 = \frac{k\sin\psi\cos\sigma_1}{\sqrt{k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi}} + \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}[k\cos\psi\,\mathfrak{Tg}\, k\psi + \sin\psi]\sin\sigma_1,$$

$$(26) \qquad m_1 = -\left\{\frac{k\cos\psi\cos\sigma_1}{\sqrt{k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi}} + \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}[k\sin\psi\,\mathfrak{Tg}\, k\psi - \cos\psi]\sin\sigma_1\right\},$$

$$n_1 = \frac{\mathfrak{Cof}\, k\psi\cos\sigma_1}{\sqrt{k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi}} - \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\,\mathfrak{Sec}\, k\psi\sin\sigma_1.$$

Die Richtungskosinus der Binormalen werden:

$$\lambda_1 = -\frac{(k\cos\psi\,\mathfrak{Tg}\, k\psi + \sin\psi)\,k\,\mathfrak{Cof}^2 k\psi - k\sin\psi(k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi)}{\sqrt{(k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi)^3 + k^2(1+k^2)\,\mathfrak{Cof}^4 k\psi}},$$

$$(27) \qquad \mu_1 = -\frac{(k\sin\psi\,\mathfrak{Tg}\, k\psi - \cos\psi)\,k\,\mathfrak{Cof}^2 k\psi + k\cos\psi(k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi)}{\sqrt{(k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi)^3 + k^2(1+k^2)\,\mathfrak{Cof}^4 k\psi}},$$

$$\nu_1 = \frac{(2k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi)\,\mathfrak{Cof}\, k\psi}{\sqrt{(k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi)^3 + k^2(1+k^2)\,\mathfrak{Cof}^4 k\psi}}.$$

Der Schmiegungswinkel ergibt sich nach einiger Umrechnung zu:

$$(28) \qquad d\sigma_1 = \frac{k^2\sqrt{k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi}\;\mathfrak{Sin}\, k\psi\,\mathfrak{Cof}\, k\psi\,(\mathfrak{Cof}^2 k\psi - 2k^2)\,d\psi}{(k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi)^3 + k^2(1+k^2)\,\mathfrak{Cof}^4 k\psi},$$

und der Torsionsradius wird:

$$(29) \qquad r_1 = \frac{(k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi)^3 + k^2(1+k^2)\,\mathfrak{Cof}^4 k\psi}{k^2\,\mathfrak{Sin}\, k\psi\,\mathfrak{Cof}^2 k\psi\,(\mathfrak{Cof}^2 k\psi - 2k^2)}.$$

b) Die sphärische Evolute der sphärischen Loxodrome.

Die Koordinaten dieser Kurve seien x_2, y_2, z_2. Dann sind die Gleichungen:

$$(30)\qquad \begin{aligned} x_2 &= \frac{k \sin\psi}{\sqrt{k^2 + \mathfrak{Cof}\, k\psi}}, \\ y_2 &= -\frac{k \cos\psi}{\sqrt{k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi}}, \\ z_2 &= \frac{\mathfrak{Cof}\, k\psi}{\sqrt{k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi}}. \end{aligned}$$

Wir finden:

$$\sin\varphi_2 = \frac{k}{\sqrt{k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi}}$$

und damit als Projektion der sphärischen Evolute der sphärischen Loxodrome auf die Äquatorebene die Kurve:

$$r'' = \frac{k}{\sqrt{k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi}}.$$

Das Bogenelement wird:

$$(31)\qquad ds_2 = k\sqrt{1+k^2}\,\frac{\mathfrak{Cof}\, k\psi}{k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi}\, d\psi.$$

Mithin wird der Krümmungsradius:

$$(32)\qquad \varrho_2 = \frac{k\sqrt{1+k^2}\,\mathfrak{Cof}^2 k\psi}{\sqrt{(k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi)^3 + k^2(1+k^2)\,\mathfrak{Cof}^4 k\psi}}$$

und der Torsionsradius:

$$(33)\qquad r_2 = \frac{\sqrt{1+k^2}\,[(k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi)^3 + k^2(1+k^2)\,\mathfrak{Cof}^4 k\psi]}{k\,\mathfrak{Sin}\, k\psi\,(\mathfrak{Cof}^2 k\psi - 2k^2)\sqrt{(k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi)^3}}.$$

Wir finden alsdann:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{\sqrt{(k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi)^3}}{k\sqrt{1+k^2}\,\mathfrak{Cof}^2 k\psi} = \frac{r}{\varrho}.$$

Die zweite sphärische Evolute hat die Gleichungen:

$$(34)\qquad \begin{aligned} x_3 &= -\frac{(k\cos\psi\,\mathfrak{Tg}\, k\psi + \sin\psi)\,k\,\mathfrak{Cof}^2 k\psi - k\sin\psi(k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi)}{\sqrt{(k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi)^3 + k^2(1+k^2)\,\mathfrak{Cof}^4 k\psi}}, \\ y_3 &= -\frac{(k\sin\psi\,\mathfrak{Tg}\, k\psi - \cos\psi)\,k\,\mathfrak{Cof}^2 k\psi + k\cos\psi(k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi)}{\sqrt{(k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi)^3 + k^2(1+k^2)\,\mathfrak{Cof}^4 k\psi}}, \\ z_3 &= \frac{(2k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi)\,\mathfrak{Cof}\, k\psi}{\sqrt{(k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi)^3 + k^2(1+k^2)\,\mathfrak{Cof}^4 k\psi}}. \end{aligned}$$

c) Die sphärische Evolvente der sphärischen Loxodrome.

Wir bezeichnen die Koordinaten mit x_4, y_4, z_4. Es ist:

$$x_4 = \cos\psi \operatorname{Sec} k\psi \cos s + \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}(k\cos\psi \operatorname{Tg} k\psi + \sin\psi)\sin s,$$

$$(35)\quad y_4 = \sin\psi \operatorname{Sec} k\psi \cos s + \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}(k\sin\psi \operatorname{Tg} k\psi - \cos\psi)\sin s,$$

$$z_4 = \operatorname{Tg} k\psi \cos s - \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \operatorname{Sec} k\psi \sin s.$$

Dabei ist:

$$s = \frac{2}{k}\sqrt{1+k^2}\,\operatorname{arctg}(e^{k\psi}).$$

Das Bogenelement wird:

$$(36)\qquad ds_4 = \sin s \operatorname{Tg} k\psi\, d\psi.$$

Die sphärische Evolvente steht allgemein zur Hüllkurve der Tangentialebenen an die Kugel längs der Ausgangskurve in einer nahen Beziehung, der zufolge wir für unseren Fall finden:

$$\alpha_4 = -\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}(\cos\psi \operatorname{Tg} k\psi - k\sin\psi),$$

$$(37)\qquad \beta_4 = -\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}(\sin\psi \operatorname{Tg} k\psi + k\cos\psi),$$

$$\gamma_4 = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \operatorname{Sec} k\psi. \quad [1])$$

Es wird also:

$$(38)\qquad d\tau_4 = \operatorname{Tg} k\psi\, d\psi,$$

und hiermit:

$$(39)\qquad \varrho_4 = \sin s.$$

Die Richtungskosinus der Hauptnormalen werden alsdann in der bekannten Art gefunden zu:

$$l_4 = -\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}(k\cos\psi \operatorname{Tg} k\psi + \sin\psi),$$

$$(40)\qquad m_4 = -\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}(k\sin\psi \operatorname{Tg} k\psi - \cos\psi),$$

$$n_4 = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \operatorname{Sec} k\psi.$$

[1]) S. 78.

Die Richtungskosinus der Binormalen werden sodann:

$$\begin{aligned} \lambda_4 &= \cos\psi \operatorname{Sec} k\psi, \\ \mu_4 &= \sin\psi \operatorname{Sec} k\psi, \\ \nu_4 &= \operatorname{Tg} k\psi. \end{aligned} \tag{41}$$

Damit wird der Schmiegungswinkel:

$$d\sigma_4 = \sqrt{1+k^2}\,\frac{d\psi}{\operatorname{Cof} k\psi}, \tag{42}$$

und der Torsionsradius:

$$r_1 = \frac{\sin s \operatorname{Sin} k\psi}{\sqrt{1+k^2}}. \tag{43}$$

d) Die Krümmungsmittelpunktskurve der sphärischen Loxodrome.

Die Koordinaten der Krümmungsmittelpunktskurven seien x'_1, y'_1, z'_1; dann ist:

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{k\sin\psi \operatorname{Sin} k\psi}{k^2+\operatorname{Cof}^2 k\psi}, \\ y'_1 &= -\frac{k\cos\psi \operatorname{Sin} k\psi}{k^2+\operatorname{Cof}^2 k\psi}, \\ z'_1 &= \frac{\operatorname{Sin} k\psi \operatorname{Cof} k\psi}{k^2+\operatorname{Cof}^2 k\psi}. \end{aligned} \tag{44}$$

Die Krümmungsmittelpunktskurve der sphärischen Loxodrome ist die Hüllkurve einer gewissen Kugelschar. Die Kugeln haben den Radius:

$$R = \frac{\operatorname{Sin} k\psi}{\sqrt{k^2+\operatorname{Cof}^2 k\psi}}.$$

Das Bogenelement wird:

$$ds'_1 = k\sqrt{1+k^2}\,\frac{\operatorname{Cof} k\psi}{k^2+\operatorname{Cof}^2 k\psi}\,d\psi. \tag{45}$$

Der Kontingenzwinkel nimmt die Form an:

$$d\tau' = \frac{\sqrt{4k^2(1+k^2)\operatorname{Cof}^4 k\psi + (k^2+\operatorname{Cof}^2 k\psi)\operatorname{Sin}^2 k\psi}}{(k^2+\operatorname{Cof}^2 k\psi)\operatorname{Cof} k\psi}\,d\psi, \tag{46}$$

und der Krümmungsradius:

$$\varrho'_1 = \frac{k\sqrt{1+k^2}\operatorname{Cof}^2 k\psi}{\sqrt{4k^2(1+k^2)\operatorname{Cof}^4 k\psi + (k^2+\operatorname{Cof}^2 k\psi)\operatorname{Sin}^2 k\psi}}. \tag{47}$$

e) Die Hüllkurve der Tangentialebenen an die Kugel längs der sphärischen Loxodrome.

Bezeichnen wir die Koordinaten mit x'_2, y'_2, z'_2, so ist:

$$(48)\quad x'_2 = \frac{k \sin\psi}{\mathfrak{Sin}\, k\psi}, \quad y'_2 = -\frac{k\cos\psi}{\mathfrak{Sin}\, k\psi}, \quad z'_2 = \mathfrak{Cotg}\, k\psi.$$

Die Differentiation dieser Gleichungen ergibt:

$$dx'_2 = \frac{k\cos\psi\,\mathfrak{Sin}\,k\psi - k^2\sin\psi\,\mathfrak{Cof}\,k\psi}{\mathfrak{Sin}^2\,k\psi}\,d\psi,$$

$$dy'_2 = \frac{k\sin\psi\,\mathfrak{Sin}\,k\psi + k^2\cos\psi\,\mathfrak{Cof}\,k\psi}{\mathfrak{Sin}^2\,k\psi}\,d\psi,$$

$$dz'_2 = -\frac{k\,d\psi}{\mathfrak{Sin}^2\,k\psi},$$

sodaß wir für das Bogenelement erhalten:

$$(49)\quad ds'_2 = k\sqrt{1+k^2}\,\frac{\mathfrak{Cof}\,k\psi}{\mathfrak{Sin}^2\,k\psi}\,d\psi,$$

und hieraus:

$$(50)\quad s'_2 = -\sqrt{1+k^2}\,\mathfrak{Cofec}\,k\psi.$$

Die Richtungskosinus der Tangenten werden:

$$\alpha'_2 = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}(\cos\psi\,\mathfrak{Tg}\,k\psi - k\sin\psi),$$

$$(51)\quad \beta'_2 = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}(\sin\psi\,\mathfrak{Tg}\,k\psi + k\cos\psi),$$

$$\gamma'_2 = -\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\,\mathfrak{Sec}\,k\psi.$$

Die Gleichung der Normalebene lautet:

$$X(\cos\psi\,\mathfrak{Tg}\,k\psi - k\sin\psi) + Y(\sin\psi\,\mathfrak{Tg}\,k\psi + k\cos\psi) - Z\,\mathfrak{Sec}\,k\psi + \sqrt{1+k^2}\,\mathfrak{Cof}\,k\psi = 0,$$

und wir erkennen aus ihr, daß der Abstand der Normalebene von der Kegelspitze gleich der Bogenlänge ist.

Wir finden:

$$d\alpha'_2 = -\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}(k\cos\psi\,\mathfrak{Tg}^2\,k\psi + \sin\psi\,\mathfrak{Tg}\,k\psi)\,d\psi,$$

$$d\beta'_2 = -\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}(k\sin\psi\,\mathfrak{Tg}^2\,k\psi - \cos\psi\,\mathfrak{Tg}\,k\psi)\,d\psi,$$

$$d\gamma'_2 = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,k\psi}{\mathfrak{Cof}^2\,k\psi}\,d\psi.$$

Der Kontingenzwinkel wird daher:

$$(52) \qquad d\tau'_2 = \mathfrak{Tg}\, k\psi\, d\psi$$

und der Krümmungsradius:

$$(53) \qquad \varrho'_2 = k\sqrt{1+k^2}\,\frac{\mathfrak{Cof}^2 k\psi}{\mathfrak{Sin}^3 k\psi}.$$

Wir finden also zwischen s'_2 und ϱ'_2 die Beziehung:

$$\frac{\varrho'_2}{s'_2} = -k\,\mathfrak{Cot}^2\mathfrak{g}\, k\psi.$$

Die Richtungskosinus der Hauptnormalen werden:

$$l'_2 = -\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}(k\cos\psi\,\mathfrak{Tg}\, k\psi + \sin\psi),$$

$$(54) \qquad m'_2 = -\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}(k\sin\psi\,\mathfrak{Tg}\, k\psi - \cos\psi),$$

$$n'_2 = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\,\mathfrak{Sec}\, k\psi.$$

Es werden also:

$$(55) \qquad dk'_2 = \sqrt{k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi}\,\frac{d\psi}{\mathfrak{Cof}\, k\psi}$$

und

$$(56) \qquad r'_2 = \frac{k\sqrt{1+k^2}\;\mathfrak{Cot}^2\mathfrak{g}\, k\psi}{\sqrt{k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi}}.$$

Die Gleichung der rektifizierenden Ebene lautet:

$$X(k\cos\psi\,\mathfrak{Tg}\, k\psi + \sin\psi) + Y(k\sin\psi\,\mathfrak{Tg}\, k\psi - \cos\psi - \\ - kZ\,\mathfrak{Sec}\, k\psi = 0.$$

Sie ist erfüllt für $X = Y = Z = 0$.

Für die Richtungskosinus der Binormalen ergibt sich:

$$(57) \qquad \begin{aligned} \lambda'_2 &= \cos\psi\,\mathfrak{Sec}\, k\psi, \\ \mu'_2 &= \sin\psi\,\mathfrak{Sec}\, k\psi, \\ \nu'_2 &= \mathfrak{Tg}\, k\psi, \end{aligned}$$

und daher bekommen wir:

$$(58) \qquad d\sigma'_2 = \sqrt{1+k^2}\,\frac{d\psi}{\mathfrak{Cof}\, k\psi},$$

$$(59) \qquad r'_2 = k\,\mathfrak{Cot}^2\mathfrak{g}\, k\psi = \frac{k}{z^2}.$$

Es wird also:

$$\frac{r'_2}{\varrho'_2} = \frac{\mathfrak{Sin}\, k\psi}{\sqrt{1+k^2}} = -\frac{1}{s'_2}.$$

Die Gleichung der Schmiegungsebene nimmt die Gestalt an:

$$X\cos\psi\,\mathfrak{Sec}\,k\psi + Y\sin\psi\,\mathfrak{Sec}\,k\psi + Z\,\mathfrak{Tg}\,k\psi - 1 = 0.$$

Das Tangentenbild der Hüllkurve hat die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x'_3 &= \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}(\cos\psi\,\mathfrak{Tg}\,k\psi - k\sin\psi),\\ y'_3 &= \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}(\sin\psi\,\mathfrak{Tg}\,k\psi + k\cos\psi), \qquad (60)\\ z'_3 &= -\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\,\mathfrak{Sec}\,k\psi. \end{aligned}$$

Das Bogenelement wird also:

$$ds'_3 = \mathfrak{Tg}\,k\psi\,d\psi, \qquad (61)$$

und hieraus folgt:

$$s'_3 = \frac{1}{k}\ln(\mathfrak{Cof}\,k\psi).$$

Für den Kontingenzwinkel erhalten wir:

$$d\tau_3 = \sqrt{k^2+\mathfrak{Cof}^2 k\psi}\,\frac{d\psi}{\mathfrak{Cof}\,k\psi}, \qquad (62)$$

und für den Krümmungsradius:

$$\varrho'_3 = \frac{\mathfrak{Sin}\,k\psi}{\sqrt{k^2+\mathfrak{Cof}^2 k\psi}}. \qquad (63)$$

Mithin besteht zwischen dem Bogen und dem Krümmungsradius die Beziehung:

$$\varrho'_3 = \sqrt{\frac{e^{2ks'_3}-1}{k^2+e^{2ks'_3}}}.$$

Der Torsionsradius ist:

$$r'_3 = \frac{\mathfrak{Sin}\,k\psi}{\sqrt{1+k^2}}. \qquad (64)$$

Das Binormalenbild hat die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x'_4 &= \cos\psi\,\mathfrak{Sec}\,k\psi,\\ y'_4 &= \sin\psi\,\mathfrak{Sec}\,k\psi, \qquad (65)\\ z'_4 &= \mathfrak{Tg}\,k\psi \end{aligned}$$

und fällt mit der sphärischen Loxodrome zusammen.

Wir hatten das Tangentenbild der Gratlinie der rektifizierenden Fläche ermittelt zu:

$$y''_1 = \lambda\sin H + \alpha\cos H.$$

Setzen wir die entsprechenden Werte für die Hüllkurve ein, so finden wir:

$$(66)\qquad \begin{aligned} x''_1 &= \frac{k \sin\psi}{\sqrt{k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi}}, \\ y''_1 &= \frac{-k \cos\psi}{\sqrt{k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi}}, \\ z''_1 &= \frac{\mathfrak{Cof}\, k\psi}{\sqrt{k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi}}. \end{aligned}$$

Das Tangentenbild der rektifizierenden Gratlinie der Hüllkurve fällt mit der sphärischen Evolute der Loxodrome zusammen.

Das Binormalenbild der rektifizierenden Gratlinie hat die Gleichungen:

$$(67)\qquad \begin{aligned} x''_2 &= -\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}(k\cos\psi\,\mathfrak{Tg}\,k\psi + \sin\psi), \\ y''_2 &= -\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}(k\sin\psi\,\mathfrak{Tg}\,k\psi - \cos\psi), \\ z''_2 &= \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\,\mathfrak{Sec}\,k\psi \end{aligned}$$

Die Filarevolvente ist bestimmt durch:

$$x''_3 = x_2 - (s_2 - a)\,\alpha_2.$$

Den ∞^1 Werten der willkürlichen Konstanten a entsprechen die ∞^1 Filarevolventen. Für $a = 0$ ergibt sich:

$$x''_3 = x_2 - \alpha_2 s_2.$$

Nach einiger Umrechnung erhalten wir hiermit:

$$(68)\qquad x''_3 = \cos\psi\,\mathfrak{Sec}\,k\psi, \quad y''_3 = \sin\psi\,\mathfrak{Sec}\,k\psi, \quad z''_3 = \mathfrak{Tg}\,k\psi.$$

Diejenige Filarevolvente der Hüllkurve, die auf der Einheitskugel liegt, fällt also mit der Loxodrome zusammen.

Es wird also:

$$(69)\qquad ds''_3 = \sqrt{1+k^2}\,\frac{d\psi}{\mathfrak{Cof}\,k\psi},$$

$$(70)\qquad \varrho''_3 = \sqrt{\frac{4\,k^2}{k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi}},$$

$$(71)\qquad r''_3 = \frac{k^2 + \mathfrak{Cof}^2 k\psi}{k\,\mathfrak{Cof}^2 k\psi}.$$

IV. Abschnitt.

Besondere sphärische Kurven.

§ 1.

Die sphärische Kurve konstanter Torsion.

Zunächst sei an die sphärische Kurve konstanter Krümmung erinnert. Wir ermitteln die Kurve aus der zu fordernden Beziehung $\varrho = \sin\sigma$; ist ϱ konstant, so erhalten wir hieraus:

$$\cos\sigma \, d\sigma = 0$$

oder

$$d\sigma = 0.$$

Die sphärischen Kurven konstanter Krümmung müssen also ebene Kurven, d. h. Kreise sein.

Serret benutzt beim Beweis folgende Beziehungen über die sphärischen Kurven:

$$(1a) \qquad \varrho^2 + r^2 \frac{d\varrho}{ds} = b^2, \quad ^1)$$

$$(1b) \qquad x = -\varrho l + \lambda r \frac{d\varrho}{ds}. \quad ^1)$$

Aus ihnen ist leicht zu erkennen, daß die sphärischen Kurven konstanter Krümmung Kreise sind. Wenn nämlich ϱ konstant ist, ergibt sich aus Gleichung (1a) $r = \infty$ oder $\varrho = b$. Im ersten Fall ist es augenscheinlich, daß die Kurve ein Kreis ist. Im zweiten Fall ergeben die Gleichungen (1b)

$$x = -bl, \qquad y = -bm, \qquad z = -bn$$

d. h. einen Kreis.

Die Darstellung der sphärischen Kurve konstanter Torsion ist weit schwieriger. Ist r konstant, so wird der Schmiegungswinkel proportional mit dem Bogenelement:

$$d\sigma = \frac{ds}{a},$$

und es ist:

$$\sigma = \frac{s}{a}.$$

---

[1]) Serret: Sur quelques formules relatives à la théorie des courbes à double courbure. Journal de Mathém. T. XVI. (1851).

Folglich ergibt sich für die sphärische Kurve konstanter Torsion:

$$\varrho = \sin\left(\frac{s}{a}\right). \tag{1}$$

Ihre Gleichungen lauten also:

$$\begin{aligned} x &= \lambda\cos\left(\frac{s}{a}\right) - l\sin\left(\frac{s}{a}\right), \\ y &= \mu\cos\left(\frac{s}{a}\right) - m\sin\left(\frac{s}{a}\right), \\ z &= \nu\cos\left(\frac{s}{a}\right) - n\sin\left(\frac{s}{a}\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Diese Gleichungen kommen bei Serret in der Form vor:

$$\frac{x}{b} = \cos\left(\frac{s}{r}\right)\lambda - r\sin\left(\frac{s}{r}\right)\frac{d\lambda}{ds}.$$

Dabei ist b der Kugelradius und $\frac{1}{r}$ die konstante Torsion.

Serret versucht nun weiter λ . . . als Funktion der Bogenlänge auszudrücken, um die Koordinaten der Kurve nur als Funktion der Bogenlänge zu erhalten, und schlägt den folgenden Weg ein. Es ist:

$$dl = -\left(\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\lambda}{r}\right)ds.$$

Dies gibt mit:

$$l = r\frac{d\lambda}{ds}$$

und

$$\alpha = \sqrt{1 - \lambda^2 - l^2}$$

mit s als unabhängiger Veränderlicher:

$$r^2\frac{d^2\lambda}{ds^2} + \lambda + \frac{r}{\varrho}\sqrt{1 - \lambda^2 - r^2\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2} = 0.$$

Nun ist aber:

$$\varrho = b\sin\left(\frac{s}{r}\right),$$

also kommt:

$$b\sin\left(\frac{s}{r}\right)\left(r^2\frac{d^2\lambda}{ds^2} + \lambda\right) + r\sqrt{1 - \lambda^2 - r^2\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2} = 0.$$

Serret setzt nun den Torsionsradius gleich der Einheit und erhält mit $\lambda = \varphi$:

$$b\sin s\left(\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \varphi\right) + \sqrt{1 - \varphi^2 - \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2} = 0,$$

und gibt an, er habe diese Gleichung differentiiert und das Resultat mit ihr kombiniert. Dadurch habe er eine lineare Gleichung dritter Ordnung erhalten, die er habe lösen können.[1])

Wir verfolgen diesen Weg nicht.

Wir erhalten aus der ebenen Kurve $\varrho = \sin\left(\frac{s}{a}\right)$ die sphärische Kurve konstanter Torsion, wenn wir jene Kurve auf die Kugel legen, ohne die Krümmung zu ändern. Wir betrachten demgemäß zunächst die ebene Kurve $\varrho = \sin\left(\frac{s}{a}\right)$.

Die Gleichung:

$$\varrho = \sin\left(\frac{s}{a}\right)$$

läßt erkennen, daß ϱ gleichzeitig mit s unendlich klein wird, sodaß die ebene Kurve im Anfangspunkt einen asymptotischen Punkt besitzt, wenn wir den Punkt mit dem Bogen $s = 0$ als Anfangspunkt bezeichnen. Mit wachsendem s nimmt ϱ jetzt zu und für $s = \frac{\pi}{2} a$ wird $\varrho = 1$; von hier aus nimmt ϱ wieder ab und wird abermals zu Null für $s = \pi a$. Wir haben hier einen zweiten asymptotischen Punkt. Beide asymptotischen Punkte für $s = 0$ und für $s = \pi a$ liegen symmetrisch in bezug auf die zu $s = \frac{\pi}{2} a$ gehörige Normale. Für $s = \frac{3}{2} \pi a$ wird $\varrho = -1$ und für $s = 2 \pi a$ wird wieder $\varrho = 0$.

Fig. 9.

Wir haben allgemein für $s = k \pi a$ einen asymptotischen Punkt, während für $s = \frac{2k-1}{2} \pi a$ $\varrho = \pm 1$ ist. Dabei durchläuft k wachsend das ganze System der reellen ganzen Zahlen.

[1]) Serret: a. a. O.

Die ebene Kurve $\varrho = \sin\left(\frac{s}{a}\right)$ besteht aus unendlich vielen Bogen von der Länge πa, die sich ständig asymptotisch um ihre Endpunkte wickeln.[1])

Diese ebene Kurve legen wir nun auf die Kugel, ohne die Krümmung zu ändern. Dabei bleiben die asymptotischen Punkte bestehen und in ihrer Umgebung können wir die Kurve als in der Tangentialebene liegend ansehen. Das Vorhandensein asymptotischer Punkte deutet darauf hin, daß die sphärische Kurve konstanter Torsion keine algebraische Kurve sein kann. Ein analytischer Beweis hierfür ist erbracht worden durch Le Vavasseur.[2])

Da der sphärische Krümmungsradius gleich dem Schmiegungswinkel ist, erhalten wir den Satz:

Der sphärische Krümmungsradius der sphärischen Kurve konstanter Torsion ist proportional der Bogenlänge.

Die sphärische Kurve konstanter Torsion ist somit das sphärische Analogon der logarithmischen Spirale.

Der Abstand des Kugelmittelpunktes vom Krümmungsmittelpunkt ist

$$h = \cos\left(\frac{s}{a}\right). \tag{3}$$

Wir finden für das Bogenelement:

$$ds = \frac{a\,d\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}}, \tag{4}$$

und für den Kontingenzwinkel erhalten wir:

$$d\tau = \frac{a\,d\varrho}{\varrho\sqrt{1-\varrho^2}}, \tag{5}$$

und für den Schmiegungswinkel:

$$d\sigma = \frac{d\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}}. \tag{6}$$

Den Winkel der ganzen Krümmung bekommen wir aus dem Lancretschen Satz durch den Ausdruck:

$$dk = \frac{d\varrho}{\varrho\sqrt{1-\varrho^2}}\sqrt{\varrho^2+a^2}. \tag{7}$$

---

[1]) Wieleitner: Spez. ebene Kurven, 322.

[2]) Le Vavasseur: Sur les courbes sphériques à torsion constante. Bull. de l'Acad. des Sciences de Toulouse. I. 82—88.

Für den Radius der ganzen Krümmung ergibt sich unabhängig von sphärischen Kurven aus:

$$r = \frac{r\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + r^2}}$$

der Ausdruck:

$$r = \frac{a\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + a^2}}. \tag{8}$$

Ferner finden wir:

$$\operatorname{tg} H = -\frac{a}{\varrho}. \tag{9}$$

a) Das Tangentenbild der sphärischen Kurve konstanter Torsion.

Den Bestimmungsgrößen dieses Tangentenbildes wollen wir den Index 1 erteilen.

Sein Bogenelement wird:

$$ds_1 = \frac{a\,d\varrho}{\varrho\sqrt{1-\varrho^2}}, \tag{10}$$

und der Kontingenzwinkel:

$$d\tau_1 = \frac{d\varrho}{\varrho\sqrt{1-\varrho^2}}\sqrt{\varrho^2 + a^2}. \tag{11}$$

Der Schmiegungswinkel ergibt sich mit Hilfe von Gleichung (9). Deren Differentiation liefert:

$$\frac{dH}{\cos^2 H} = \frac{a\,d\varrho}{\varrho^2}.$$

Nun ist allgemein:

$$\cos^2 H = \left(\frac{r}{r}\right)^2,$$

sodaß dieser Ausdruck für unseren Fall die Form annimmt:

$$\cos^2 H = \frac{\varrho^2}{\varrho^2 + a^2},$$

und der Schmiegungswinkel wird:

$$d\sigma_1 = \frac{a\,d\varrho}{a^2 + \varrho^2}. \tag{12}$$

Die Gleichung ist integrabel und bestimmt den sphärischen Krümmungsradius zu:

$$\varrho'_1 = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\varrho}{a}\right). \tag{13}$$

Der Krümmungsradius des Tangentenbildes war allgemein $\varrho_1 = \sin H$. Hieraus finden wir für unseren besonderen Fall:

$$\varrho_1 = \frac{a}{\sqrt{\varrho^2 + a^2}}. \tag{14}$$

Der Torsionsradius wird:

$$r_1 = \frac{a^2 + \varrho^2}{\varrho\sqrt{1 - \varrho^2}}. \tag{15}$$

Uns interessieren noch die natürlichen Gleichungen des Tangentenbildes. Wir können seinem Bogenelement die Form geben:

$$ds_1 = \frac{ds}{\sin\left(\frac{s}{a}\right)}.$$

Setzen wir $s = a\,u$, so ergibt sich:

$$s_1 = a \log\left[\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}\right)\right]$$

oder:

$$\operatorname{tg}\frac{u}{2} = e^{\frac{s_1}{a}},$$

und wenn wir zum ganzen Winkel übergehen:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{2\,e^{\frac{s_1}{a}}}{1 - e^{2\frac{s_1}{a}}},$$

Es ist also:

$$\sin\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{2\,e^{\frac{s_1}{a}}}{1 + e^{2\frac{s_1}{a}}},$$

d. h.

$$\varrho = \frac{2}{e^{\frac{s_1}{a}} + e^{-\frac{s_1}{a}}},$$

oder in hyperbolischen Funktionen ausgedrückt:

$$\varrho = \frac{1}{\mathfrak{Cof}\left(\frac{s_1}{a}\right)}.$$

Die natürlichen Gleichungen des Tangentenbildes der sphärischen Kurve konstanter Torsion lauten also:

$$\varrho_1 = \frac{a\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{s_1}{a}\right)}{\sqrt{a^2 + \mathfrak{Cof}^2\left(\frac{s_1}{a}\right)}},$$

(16)

$$r_1 = \frac{1 + a^2\,\mathfrak{Cof}^2\left(\frac{s_1}{a}\right)}{\mathfrak{Sin}\left(\frac{s_1}{a}\right)}.$$

b) Die sphärische Evolute der sphärischen Kurve konstanter Torsion.

Das Bogenelement ist:

(17) $$ds_2 = \frac{ds}{a}.$$

Demnach gilt der Satz:

Das Verhältnis der Bogenelemente einer sphärischen Kurve konstanter Torsion und ihrer sphärischen Evolute ist konstant.[1])

Es wird ferner:

(18) $$ds_1 = \frac{d\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}}.$$

Zwischen dem Bogenelement des Tangentenbildes und der sphärischen Evolute besteht danach die allgemein zu fordernde Beziehung:

(19) $$\frac{ds_1}{ds_2} = \frac{a}{\varrho} = -\operatorname{tg} H.$$

Für den Krümmungsradius erhalten wir:

(20) $$\varrho_2 = \frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + a^2}},$$

und für den Torsionsradius:

(21) $$r_2 = \frac{a^2 + \varrho^2}{a\sqrt{1-\varrho^2}}.$$

Es kommt uns jetzt darauf an, die natürlichen Gleichungen zu ermitteln.

Wir finden:

$$s_2 = \frac{s}{a},$$

und deshalb:

$$\varrho = \sin s_2.$$

[1]) Scheffers: Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, S. 341.

Folglich lauten die natürlichen Gleichungen:

$$\varrho_2 = \frac{\sin s_2}{\sqrt{\sin^2 s_2 + a^2}},$$

$$r_2 = \frac{a^2 + \sin^2 s_2}{a \cos s_2}. \tag{22}$$

Die sphärische Evolute der sphärischen Kurve konstanter Torsion besteht also aus unendlich vielen Bogen von der Länge $\frac{\pi}{2}$, die sich asymptotisch um die Endpunkte legen.

c) Die Krümmungsmittelpunktskurve der sphärischen Kurven konstanter Torsion.

Die Gleichungen lauten:

$$x_3 = \lambda \cos\left(\frac{s}{a}\right), \quad y_3 = \mu \cos\left(\frac{s}{a}\right), \quad z_3 = \nu \cos\left(\frac{s}{a}\right). \tag{23}$$

Die Differentiation ergibt:

$$dx_3 = \left[l \cos\left(\frac{s}{a}\right) - \lambda \sin\left(\frac{s}{a}\right)\right]\frac{ds}{a}.$$

Folglich wird das Bogenelement:

$$ds_3 = \frac{ds}{a}, \tag{24}$$

und wir haben den Satz:

Die Bogenlänge einer sphärischen Kurve konstanter Torsion stehen zu den Bogenlängen entsprechender Stücke ihrer Krümmungsmittelpunktskurve in konstantem Verhältnis.

Die Richtungskosinus der Tangenten werden:

$$\alpha_3 = l \cos\left(\frac{s}{a}\right) - \lambda \sin\left(\frac{s}{a}\right),$$

$$\beta_3 = m \cos\left(\frac{s}{a}\right) - \mu \sin\left(\frac{s}{a}\right), \tag{25}$$

$$\gamma_3 = n \cos\left(\frac{s}{a}\right) - \nu \sin\left(\frac{s}{a}\right).$$

Hieraus finden wir:

$$d\alpha_3 = -\left[\alpha \cot^2\left(\frac{s}{a}\right) + \frac{2}{a}\left\{\lambda \cos\left(\frac{s}{a}\right) + l \sin\left(\frac{s}{a}\right)\right\}\right] ds,$$

sodaß der Kontingenzwinkel wird:

$$d\tau^2_3 = \left[\frac{4}{a^2} + \cot^2\left(\frac{s}{a}\right)\right] ds^2, \tag{26}$$

und der Krümmungsradius:

$$(27) \qquad \varrho_3 = \frac{1}{\sqrt{4 + a^2 \cot^2\left(\frac{s}{a}\right)}}.$$

Die Richtungskosinus der Hauptnormalen werden:

$$(28) \quad \begin{aligned} l_3 &= \alpha \sin\chi + \left[\lambda \cos\left(\frac{s}{a}\right) + l \sin\left(\frac{s}{a}\right)\right] \cos\chi, \\ m_3 &= \beta \sin\chi + \left[\mu \cos\left(\frac{s}{a}\right) + m \sin\left(\frac{s}{a}\right)\right] \cos\chi, \\ n_3 &= \gamma \sin\chi + \left[\nu \cos\left(\frac{s}{a}\right) + n \sin\left(\frac{s}{a}\right)\right] \cos\chi, \end{aligned}$$

und die der Binormalen:

$$(29) \quad \begin{aligned} \lambda_3 &= \alpha \cos\chi - \left[\lambda \cos\left(\frac{s}{a}\right) + l \sin\left(\frac{s}{a}\right)\right] \sin\chi, \\ \mu_3 &= \beta \cos\chi - \left[\mu \cos\left(\frac{s}{a}\right) + m \sin\left(\frac{s}{a}\right)\right] \sin\chi, \\ \nu_3 &= \gamma \cos\chi - \left[\nu \cos\left(\frac{s}{a}\right) + n \sin\left(\frac{s}{a}\right)\right] \sin\chi. \end{aligned}$$

Der eingeführte Hilfswinkel χ ist bestimmt durch:

$$\sin\chi = \frac{a \cot\left(\frac{s}{a}\right)}{\sqrt{4 + a^2 \cot^2\left(\frac{s}{a}\right)}},$$

$$\cos\chi = \frac{-2}{\sqrt{4 + a^2 \cot^2\left(\frac{s}{a}\right)}}.$$

Für den Schmiegungswinkel bekommen wir alsdann:

$$(30) \qquad d\sigma_3 = ds - d\chi,$$

und für den Torsionsradius:

$$(31) \qquad r_3 = \frac{ds}{a\,(ds - d\chi)}.$$

d) Die Hüllkurve der Tangentialebenen an die Kugel längs der Ausgangskurve.

Die Gleichungen lauten:

$$(32) \qquad x_4 = \frac{\lambda}{\cos\left(\frac{s}{a}\right)}, \quad y_4 = \frac{\mu}{\cos\left(\frac{s}{a}\right)}, \quad z_4 = \frac{\nu}{\cos\left(\frac{s}{a}\right)}.$$

Die Differentiation ergibt:

$$dx_4 = \left[1\cos\left(\frac{s}{a}\right) + \lambda \sin\left(\frac{s}{a}\right)\right] \frac{ds}{a\cos^2\left(\frac{s}{a}\right)},$$

sodaß wir für das Bogenelement erhalten:

$$ds_4 = \frac{ds}{a\cos^2\left(\frac{s}{a}\right)}, \tag{33}$$

und hieraus:

$$s_4 = \operatorname{tg}\left(\frac{s}{a}\right). \tag{34}$$

Die Richtungskosinus der Tangenten sind:

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= 1\cos\left(\frac{s}{a}\right) + \lambda \sin\left(\frac{s}{a}\right), \\ \beta_4 &= m\cos\left(\frac{s}{a}\right) + \mu \sin\left(\frac{s}{a}\right), \\ \gamma_4 &= n\cos\left(\frac{s}{a}\right) + \nu \sin\left(\frac{s}{a}\right). \end{aligned} \tag{35}$$

Wir finden hieraus:

$$d\alpha_4 = \alpha \cot\left(\frac{s}{a}\right) ds,$$

sodaß wir für den Kontingenzwinkel bekommen:

$$d\tau_4 = \cot\left(\frac{s}{a}\right) ds, \tag{36}$$

und für den Krümmungsradius:

$$\varrho_4 = \frac{\sin\left(\frac{s}{a}\right)}{a\cos^3\left(\frac{s}{a}\right)}. \tag{37}$$

Der Winkel der ganzen Krümmung wird:

$$dk_4 = \frac{a\, d\varrho}{\varrho\sqrt{1-\varrho^2}}, \tag{38}$$

oder auch:

$$dk_4 = \frac{ds}{\sin\left(\frac{s}{a}\right)}. \tag{39}$$

Hiermit wird der Radius der ganzen Krümmung:

$$r_4 = \frac{\sin\left(\frac{s}{a}\right)}{a\cos^2\left(\frac{s}{a}\right)}. \tag{40}$$

Die Richtungskosinus der Binormalen sind:

$$\begin{aligned} \lambda_4 &= l\sin\left(\frac{s}{a}\right) - \lambda\cos\left(\frac{s}{a}\right), \\ \mu_4 &= m\sin\left(\frac{s}{a}\right) - \mu\cos\left(\frac{s}{a}\right), \\ \nu_4 &= n\sin\left(\frac{s}{a}\right) - \nu\cos\left(\frac{s}{a}\right). \end{aligned} \tag{41}$$

Hieraus finden wir:

$$d\lambda_4 = -\alpha\, ds$$

und daher:

$$d\sigma_4 = ds. \tag{42}$$

Der Torsionsradius wird:

$$r_4 = a\cos^2\left(\frac{s}{a}\right). \tag{43}$$

Mithin wird wieder:

$$\frac{\varrho_4}{r_4} = s_4.$$

e) Die sphärische Evolvente der sphärischen Kurven konstanter Torsion.

Um Verwechslungen auszuschließen, sind hier die Elemente der sphärischen Evolvente mit dem Index 5 statt früher mit 4 bezeichnet.

Das Bogenelement wird:

$$ds_5 = \sin s\cot\left(\frac{s}{a}\right)ds. \tag{44}$$

Für den Schmiegungswinkel bekommen wir:

$$d\sigma_5 = ds = \frac{a\, d\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}} \tag{45}$$

und für den Kontingenzwinkel:

$$d\tau_5 = \cot\left(\frac{s}{a}\right)ds = \frac{a}{\varrho}\, d\varrho. \tag{46}$$

Der Winkel der ganzen Krümmung wird:

$$(47) \qquad dk_5 = \frac{a\, d\varrho}{\varrho \sqrt{1-\varrho^2}}.$$

Der Krümmungsradius ist:

$$(48) \qquad \varrho_5 = \sin s,$$

und der Torsionsradius:

$$(49) \qquad r_5 = \sin s \cot\left(\frac{s}{a}\right).$$

---

§ 2.

Die sphärische Kurve mit konstantem Produkt der beiden Krümmungen.

Wir gehen aus von der Gleichung:

$$(1) \qquad \varrho\, r = b,$$

wo b konstant ist, und suchen die natürlichen Gleichungen der Kurve.

Es ist:

$$r = \frac{b}{\sin\sigma},$$

oder:

$$(2) \qquad ds = b\frac{d\sigma}{\sin\sigma}.$$

Hieraus folgt:

$$s = b \log\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)\right].$$

Demnach erhalten wir:

$$\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2} = e^{\frac{s}{b}},$$

oder:

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{2e^{\frac{s}{b}}}{1-e^{2\frac{s}{b}}},$$

und hieraus nach elementarer Rechnung:

$$\sin\sigma = \frac{2e^{\frac{s}{b}}}{1+e^{2\frac{s}{b}}}.$$

Mithin ergeben sich als natürliche Gleichungen der betrachteten Kurve:

$$\varrho = \frac{2}{e^{\frac{s}{b}} + e^{-\frac{s}{b}}} = \frac{1}{\mathfrak{Cof}\left(\frac{s}{b}\right)},$$

(3)

$$r = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{s}{b}} + e^{-\frac{s}{b}}\right) = b\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{s}{b}\right).$$

Wir betrachten die ebene Kurve:

$$\varrho = \frac{1}{\mathfrak{Cof}\left(\frac{s}{b}\right)}.$$

Für $s = 0$ wird $\varrho = 1$ und für $s = \pm\infty$ wird $\varrho = 0$. Die Kurve besteht also aus einem Bogen von unendlicher Länge, der begrenzt wird von zwei asymptotischen Punkten. Sie ähnelt der Klothoide.

Während die sphärische Kurve konstanter Torsion aus unendlich vielen Bogen von endlicher Länge besteht, hat demnach die sphärische Kurve mit konstantem Produkt der beiden Krümmungen einen einzigen Bogen von unendlicher Länge.

Wir erhalten:

$$d\tau = \mathfrak{Cof}\left(\frac{s}{b}\right)ds \tag{4}$$

und

$$d\sigma = \frac{ds}{b\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{s}{b}\right)}. \tag{5}$$

Diese Gleichung ist integrabel und bestimmt den sphärischen Krümmungsradius:

$$\varrho' = 2\,b\,\operatorname{arctg}\left(e^{\frac{s}{b}}\right). \tag{6}$$

Der Radius der ganzen Krümmung wird:

$$r = \frac{b\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{s}{b}\right)}{\sqrt{1 + b^2\,\mathfrak{Cof}^4\left(\frac{s}{b}\right)}}, \tag{7}$$

und deshalb der Winkel der ganzen Krümmung:

$$(8) \qquad dk = \sqrt{1 + b^2 \mathfrak{Cof}^4\left(\frac{s}{b}\right)} \frac{ds}{b\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{s}{b}\right)}.$$

Ferner wird:

$$(9) \qquad \operatorname{tg} H = -b\,\mathfrak{Cof}^2\left(\frac{s}{b}\right).$$

a) Das Tangentenbild.

Wir erhalten für das Bogenelement:

$$(10) \qquad ds_1 = \mathfrak{Cof}\left(\frac{s}{b}\right) ds.$$

Hieraus folgt:

$$(11) \qquad s_1 = b\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{s}{b}\right).$$

Der Kontingenzwinkel wird:

$$(12) \qquad d\tau_1 = \frac{1}{b\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{s}{b}\right)} \sqrt{1 + b^2 \mathfrak{Cof}^4\left(\frac{s}{b}\right)}\, ds.$$

Zur Darstellung des Schmiegungswinkels benutzen wir:

$$\operatorname{tg} H = -b\,\mathfrak{Cof}^2\left(\frac{s}{b}\right).$$

Hieraus folgt:

$$\frac{dH}{\cos^2 H} = -2\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{s}{b}\right)\mathfrak{Cof}\left(\frac{s}{b}\right) ds,$$

und deshalb wird der Schmiegungswinkel:

$$(13) \qquad d\sigma_1 = \frac{\mathfrak{Sin}\,2\left(\frac{s}{b}\right)}{b^2 + \mathfrak{Cof}^4\left(\frac{s}{b}\right)} ds.$$

Der Krümmungsradius ist:

$$(14) \qquad \varrho_1 = \frac{b\,\mathfrak{Cof}^2\left(\frac{s}{b}\right)}{\sqrt{1 + b^2 \mathfrak{Cof}^4\left(\frac{s}{b}\right)}}$$

und der Torsionsradius:

$$(15) \qquad r_1 = \frac{b^2 + \mathfrak{Cof}^4\left(\frac{s}{b}\right)}{2\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{s}{b}\right)\mathfrak{Cof}^2\left(\frac{s}{b}\right)}.$$

Nun ist aber:

$$\mathfrak{Sin}\left(\frac{s}{b}\right) = \frac{s_1}{b}$$

und deshalb

$$\mathfrak{Cof}^2\left(\frac{s}{b}\right) = \frac{b^2 + s_1^2}{b^2}.$$

Infolgedessen lauten die natürlichen Gleichungen des Tangentenbildes:

$$(16) \qquad \varrho_1 = \frac{b^2 + s_1^2}{\sqrt{b^2 + (b^2 + s_1^2)^2}},$$

$$r_1 = \frac{b^2 + (b^2 + s_1^2)^2}{2\,b^3\,s_1}.$$

b) Die sphärische Evolute.

Das Bogenelement wird:

$$(17) \qquad ds_2 = \frac{ds}{b\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{s}{b}\right)}.$$

Daher finden wir auch hier wie im allgemeinen Fall:

$$\frac{ds_1}{ds_2} = b\,\mathfrak{Cof}^2\left(\frac{s}{b}\right) = -\operatorname{tg} H.$$

Der Krümmungsradius wird:

$$(18) \qquad \varrho_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + b^2\,\mathfrak{Cof}^2\left(\frac{s}{b}\right)}},$$

und der Torsionsradius:

$$(19) \qquad r_2 = -\frac{b^2 + \mathfrak{Cof}^4\left(\frac{s}{b}\right)}{2\,b\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{s}{b}\right)\mathfrak{Cof}^2\left(\frac{s}{b}\right)}.$$

Die Krümmungsmittelpunktskurve.

Wir hatten gefunden:

$$\sin\sigma = \frac{1}{\mathfrak{Cof}\left(\frac{s}{b}\right)}.$$

Folglich wird:

$$\cos\sigma\, d\sigma = -\frac{\mathfrak{Sin}\left(\frac{s}{b}\right) ds}{\mathfrak{Cof}^2\left(\frac{s}{b}\right)},$$

und hieraus folgt:

$$\cos\sigma = \mathfrak{Sin} - \mathfrak{Tg}\left(\frac{s}{b}\right).$$

Die Kurvengleichungen lauten also:

$$x_3 = -\lambda\, \mathfrak{Tg}\left(\frac{s}{b}\right),$$

$$y_3 = -\mu\, \mathfrak{Tg}\left(\frac{s}{b}\right), \tag{20}$$

$$z_3 = -\nu\, \mathfrak{Tg}\left(\frac{s}{b}\right).$$

Die Differentiation ergibt:

$$dx_3 = -\left[\frac{d\lambda}{ds}\mathfrak{Tg}\left(\frac{s}{b}\right) + \frac{\lambda}{b\,\mathfrak{Cof}^2\left(\frac{s}{b}\right)}\right] ds,$$

$$dx_3 = -\left[\frac{1\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{s}{b}\right)}{b\,\mathfrak{Cof}^2\left(\frac{s}{b}\right)} + \frac{\lambda}{b\,\mathfrak{Cof}^2\left(\frac{s}{b}\right)}\right] ds.$$

Hieraus finden wir nach elementarer Rechnung:

$$ds_3 = \frac{ds}{b\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{s}{b}\right)}. \tag{21}$$

Wir ermitteln dann die Richtungskosinus der Tangenten zu:

$$\alpha_s = -\left[l\,\mathfrak{Tg}\left(\frac{s}{b}\right) + \frac{\lambda}{\mathfrak{Cof}\left(\frac{s}{b}\right)}\right],$$

$$\beta_s = -\left[m\,\mathfrak{Tg}\left(\frac{s}{b}\right) + \frac{\lambda}{\mathfrak{Cof}\left(\frac{s}{b}\right)}\right], \tag{22}$$

$$\gamma_s = -\left[n\,\mathfrak{Tg}\left(\frac{s}{b}\right) + \frac{\lambda}{\mathfrak{Cof}\left(\frac{s}{b}\right)}\right].$$

Wir differentiieren und bekommen:

$$d\alpha_s = -\frac{dl}{ds}\,\mathfrak{Tg}\left(\frac{s}{b}\right) - \frac{l}{b\,\mathfrak{Cof}^2\left(\frac{s}{b}\right)} - \frac{\frac{d\lambda}{ds}\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{s}{b}\right) - \frac{\lambda}{b}\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{s}{b}\right)}{\mathfrak{Cof}^2\left(\frac{s}{b}\right)}$$

Nach einigen Umformungen wird:

$$d\alpha_s = \left[\alpha\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{s}{b}\right)\mathfrak{Cof}^2\left(\frac{s}{b}\right) - 2\left(\frac{\lambda}{b}\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{s}{b}\right) + \frac{l}{b}\right)\right]\frac{ds}{\mathfrak{Cof}^2\left(\frac{s}{b}\right)},$$

sodaß wir für den Kontingenzwinkel erhalten:

$$d\tau_s^2 = \left[\mathfrak{Sin}^2\left(\frac{s}{b}\right) + \frac{4}{b^2\,\mathfrak{Cof}^2\left(\frac{s}{b}\right)}\right]ds^2. \tag{23}$$

Der Krümmungsradius lautet:

$$\varrho_s = \frac{1}{\sqrt{4 + b^2\,\mathfrak{Sin}^2\left(\frac{s}{b}\right)\mathfrak{Cof}^2\left(\frac{s}{b}\right)}}. \tag{24}$$

Die Richtungskosinus der Hauptnormalen lassen sich mit Hilfe des durch

$$\sin\vartheta = \frac{\mathfrak{Sin}\left(\frac{s}{b}\right)\mathfrak{Cof}\left(\frac{s}{b}\right)}{\sqrt{4 + b^2\,\mathfrak{Sin}^2\left(\frac{s}{b}\right)\mathfrak{Cof}^2\left(\frac{s}{b}\right)}},$$

$$\cos\vartheta = \frac{-2}{\sqrt{4 + b^2\,\mathfrak{Sin}^2\left(\frac{s}{b}\right)\mathfrak{Cof}^2\left(\frac{s}{b}\right)}} \tag{25}$$

bestimmten Winkels ϑ in der Form ausdrücken:

$$l_3 = \alpha \sin\vartheta + \left[\frac{l}{\mathfrak{Cof}\left(\frac{s}{b}\right)} - \lambda\,\mathfrak{Tg}\left(\frac{s}{b}\right)\right]\cos\vartheta,$$

$$(26)\qquad m_3 = \beta \sin\vartheta + \left[\frac{m}{\mathfrak{Cof}\left(\frac{s}{b}\right)} - \mu\,\mathfrak{Tg}\left(\frac{s}{b}\right)\right]\cos\vartheta,$$

$$n_3 = \beta \sin\vartheta + \left[\frac{n}{\mathfrak{Cof}\left(\frac{s}{b}\right)} - \nu\,\mathfrak{Tg}\left(\frac{s}{b}\right)\right]\cos\vartheta.$$

Die Richtungskosinus der Binormalen werden:

$$\lambda_3 = \alpha\cos\vartheta - \left[\frac{l}{\mathfrak{Cof}\left(\frac{s}{b}\right)} - \lambda\,\mathfrak{Tg}\left(\frac{s}{b}\right)\right]\sin\vartheta,$$

$$(27)\qquad \mu_3 = \beta\cos\vartheta - \left[\frac{m}{\mathfrak{Cof}\left(\frac{s}{b}\right)} - \mu\,\mathfrak{Tg}\left(\frac{s}{b}\right)\right]\sin\vartheta,$$

$$\nu_3 = \gamma\cos\vartheta - \left[\frac{n}{\mathfrak{Cof}\left(\frac{s}{b}\right)} - \nu\,\mathfrak{Tg}\left(\frac{s}{b}\right)\right]\sin\vartheta.$$

Der Schmiegungswinkel wird:

$$(28)\qquad d\sigma_3 = ds - d\vartheta,$$

und der Torsionsradius:

$$(29)\qquad r_3 = \frac{ds}{(ds - d\vartheta)\, b\, \mathfrak{Cof}\left(\frac{s}{b}\right)}.$$

d) Die Hüllkurve der Tangentialebenen.

Die Gleichungen sind:

$$x_4 = \vartheta - \lambda\,\mathfrak{Cotg}\left(\frac{s}{b}\right),$$

$$(30)\qquad y_4 = \vartheta - \mu\,\mathfrak{Cotg}\left(\frac{s}{b}\right),$$

$$z_4 = \vartheta - \nu\,\mathfrak{Cotg}\left(\frac{s}{b}\right).$$

Hiernach erhalten wir:

$$dx_4 = -\left[\frac{d\lambda}{ds}\mathfrak{Cotg}\left(\frac{s}{b}\right) - \frac{\lambda}{b\,\mathfrak{Sin}^2\left(\frac{s}{b}\right)}\right]ds,$$

und nach einigen Umformungen:

$$dx_4 = \left[\frac{\lambda}{b\,\mathfrak{Sin}^2\left(\frac{s}{b}\right)} - \frac{l}{b\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{s}{b}\right)}\right]ds.$$

Infolgedessen wird das Bogenelement:

$$ds_4 = \frac{\mathfrak{Cof}\left(\frac{s}{b}\right)}{b\,\mathfrak{Sin}^2\left(\frac{s}{b}\right)}\,ds \tag{31}$$

und die Richtungskosinus der Tangenten:

$$\alpha_4 = \frac{\lambda}{\mathfrak{Cof}\left(\frac{s}{b}\right)} - l\,\mathfrak{Tg}\left(\frac{s}{b}\right),$$

$$\beta_4 = \frac{\mu}{\mathfrak{Cof}\left(\frac{s}{b}\right)} - m\,\mathfrak{Tg}\left(\frac{s}{b}\right), \tag{32}$$

$$\gamma_4 = \frac{\nu}{\mathfrak{Cof}\left(\frac{s}{b}\right)} - n\,\mathfrak{Tg}\left(\frac{s}{b}\right).$$

Wir finden:

$$d\alpha_4 = \left[\frac{d\lambda}{ds}\frac{1}{\mathfrak{Cof}\left(\frac{s}{b}\right)} - \frac{\lambda}{b}\frac{\mathfrak{Sin}\left(\frac{s}{b}\right)}{\mathfrak{Cof}^2\left(\frac{s}{b}\right)} - \frac{dl}{ds}\mathfrak{Tg}\left(\frac{s}{b}\right) - \frac{l}{b\,\mathfrak{Cof}^2\left(\frac{s}{b}\right)}\right]ds,$$

und hieraus:

$$d\alpha_4 = \alpha\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{s}{b}\right)ds,$$

also:

$$d\tau_4 = \mathfrak{Sin}\left(\frac{s}{b}\right)ds. \tag{33}$$

Folglich wird der Krümmungsradius:

$$\varrho_4 = \frac{\mathfrak{Cof}\left(\frac{s}{b}\right)ds}{b\,\mathfrak{Sin}^3\left(\frac{s}{b}\right)}. \tag{34}$$

Wir finden ferner:

$$dk_4 = \mathfrak{Cof}\left(\frac{s}{b}\right) ds, \tag{35}$$

und damit:

$$r_4 = \frac{1}{b\,\mathfrak{Sin}^2\left(\frac{s}{b}\right)}. \tag{36}$$

Die Richtungskosinus der Binormalen sind:

$$\lambda_4 = \frac{l}{\mathfrak{Cof}\left(\frac{s}{b}\right)} + \lambda\,\mathfrak{Tg}\left(\frac{s}{b}\right),$$

$$\mu_4 = \frac{m}{\mathfrak{Cof}\left(\frac{s}{b}\right)} + \mu\,\mathfrak{Tg}\left(\frac{s}{b}\right), \tag{37}$$

$$\nu_4 = \frac{n}{\mathfrak{Cof}\left(\frac{s}{b}\right)} + \nu\,\mathfrak{Tg}\left(\frac{s}{b}\right).$$

Wir finden hieraus:

$$d\sigma_4 = ds, \tag{38}$$

und folglich:

$$r_4 = \frac{\mathfrak{Cof}\left(\frac{s}{b}\right)}{b\,\mathfrak{Sin}^2\left(\frac{s}{b}\right)}. \tag{39}$$

Mithin ist:

$$\frac{r_4}{\varrho_4} = \mathfrak{Sin}\left(\frac{s}{b}\right).$$

Durch die Integration des Bogenelementes ergibt sich mit dieser Beziehung:

$$\frac{r_4}{\varrho_4} = -\frac{1}{s_4}. \tag{40}$$

e) Die sphärische Evolvente.

Das Bogenelement wird:

$$d_5 = \mathfrak{Sin}\left(\frac{s}{b}\right) \sin s\, ds. \tag{41}$$

Der Krümmungsradius ist:

$$\varrho_5 = \sin s \tag{42}$$

und der Torsionsradius:

$$r_5 = -\mathfrak{Cin}\left(\frac{s}{b}\right)\sin s. \tag{43}$$

---

§ 3.

Die sphärische Kurve $r\varrho^n = \text{konst.}$

Aus der Beziehung:

$$r\varrho^n = \text{konst.} = k^{n+1}$$

finden wir sogleich:

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{\sin^n \sigma}{k^{n+1}},$$

oder auch:

$$ds = k^{n+1}\frac{d\sigma}{\sin^n \sigma}, \tag{1}$$

und haben damit eine Gleichung, die auch elementar integrierbar ist.

Wir kommen schließlich auf die Integration der Gleichung:

$$ds = k^3\frac{d\sigma}{\sin^2\sigma}, \tag{2}$$

die dem Falle $r\varrho = k^3$ entspricht, und wir erhalten:

$$s = -k^3\cot\sigma.$$

Infolgedessen lauten die natürlichen Gleichungen:

$$\varrho = \sqrt{\frac{k^6}{k^6 + s^2}}, \qquad r = \frac{1}{k^3}(k^6 + s^2). \tag{3}$$

Die Ableitung gilt natürlich auch für negative n.

Wir betrachten insbesondere den Fall $n = -1$:

$$r\varrho^{-1} = \text{konst.}$$

Das ergibt aber:

$$\frac{r}{\varrho} = -\operatorname{tg} H = \text{konst.},$$

d. h. die sphärische Schraubenlinie.

Wir finden:

$$\frac{ds}{d\sigma} = -\operatorname{tg} H \sin\sigma,$$

d. h.

$$s = \operatorname{tg} H \cos\sigma.$$

Hieraus folgt:

$$s^2 = \operatorname{tg}^2 H\,(1-\varrho^2),$$

$$\frac{s^2}{\operatorname{tg}^2 H} = 1-\varrho^2.$$

Die natürliche Gleichung der sphärischen Schrauenlinie ist also:

(4) $$\varrho^2 + s^2 \cot^2 H = 1.$$ [1])

In demselben Sinne sind dann ganz allgemein die Kurven

$$\varrho = f(r)$$

zu behandeln.

Es sei z. B.: $\varrho^2 = ar$. Dann erhalten wir:

$$s = \frac{1}{a}\int \sin^2\sigma\, d\sigma,$$

und hieraus:

$$s = \frac{1}{2a}\left(\arcsin\varrho - \varrho\sqrt{1-\varrho^2}\right).$$

Diese Gleichung ist nun nach der früheren Methode zu diskutieren.

[1]) Schell-Salkowski S. 113.

Druckfehlerberichtigung.

In der Formel Zeile 6 Seite 97 und in den Formeln (30) Seite 99 ist $\mathfrak{Y}$ überflüssig und in der dritten der Formeln (26) muß an Stelle β der Buchstabe γ stehen.

Lebenslauf.

Am 10. Oktober 1893 wurde ich, Hans Rühlemann, als Sohn des Lehrers Karl Rühlemann und seiner Ehefrau Auguste geb. Dettmer zu Eisleben geboren. Ich bin evangelischer Konfession und preußischer Staatsangehörigkeit.

Nachdem ich 4 Jahre die Mittelschule besucht hatte, kam ich auf die Oberrealschule meiner Heimatstadt und verließ sie Ostern 1913 mit dem Zeugnis der Reife. Ich bezog die Universität Halle, um Mathematik und Naturwissenschaften zu studieren und verblieb daselbst während meiner ganzen Studienzeit.

Ich nahm teil an den Vorlesungen, Seminaren und Übungen der Herren Dozenten:

Gutzmer, Wangerin, Dorn, Schmidt, Fries, Menzer, Eberhard, Pfeifer, Buchholz.

Allen meinen akademischen Lehrern bin ich zu großem Dank für die Förderung meines Studiums verpflichtet.